4. ПОТПРОСТОРИ, СУМЕ ПОТПРОСТОРА

(4.1) Нека су у векторском простору $\mathbb{V}$ задата два једнакодимензионална потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, при чему се $\mathbb{W}_1$ садржи у $\mathbb{W}_2$. Показати да су $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ *једнаки међусобно*.

Нека је $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_k\rangle\}$ базис потпростора $\mathbb{W}_1$ који се састоји од k линеарно независних вектора из $\mathbb{V}$. Пошто су према поставци задатка потпростори једнаких димензија $\dim\mathbb{W}_1 = \dim\mathbb{W}_2$, то значи да и потпростор $\mathbb{W}_2$ мора имати исти број k линеарно независних вектора. *Ерго*, потпростори $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ јесу једнаки.

(4.2) Показати да у простору $\mathbb{F}^n$ скуп свих вектора датих у облику уређених $n-$торки $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ за које важи услов: $\xi_1+\ldots+\xi_n=0$, представља *потпростор*. Наћи један *базис* и одредити *димензију* овог потпростора.

Да би одређени скуп вектора био потпростор, мора да важи услов

$$\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle\in\mathbb{S}\,,\quad |v_1\rangle,|v_2\rangle\in\mathbb{S}$$

што значи да дати скуп вектора мора бити *затворен* у односу на две бинарне операције: сабирање вектора и множење вектора скаларом. Горе наведени услов може се написати преко уређених $n-$торки као

$$\begin{aligned}\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle&=\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)+\beta(\eta_1,\ldots,\eta_n)\\&=(\alpha\xi_1,\ldots,\alpha\xi_n)+(\beta\eta_1,\ldots,\beta\eta_n)\\&=(\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\ldots,\alpha\xi_n+\beta\eta_n)\end{aligned}$$

Према поставци задатка, линеарна комбинација вектора $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ написана горе у облику уређене $n-$торке припадаће скупу вектора $\mathbb{S}$ само ако је збир свих елемената уређене $n-$торке једнак нули

$$\begin{aligned}(\alpha\xi_1+\beta\eta_1)+\ldots+(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)&=(\alpha\xi_1+\ldots+\alpha\xi_n)+(\beta\eta_1+\ldots+\beta\eta_n)\\&=\alpha(\xi_1+\ldots+\xi_n)+\beta(\eta_1+\ldots+\eta_n)\\&=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0\end{aligned}$$

Тражени услов је испуњен, те је $(\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\ldots,\alpha\xi_n+\beta\eta_n)=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle\in\mathbb{S}$, што значи да скуп вектора $\mathbb{S}$ заиста јесте потпростор.

Један *базис* овог потпростора био би скуп вектора

$$\{(-1,1,0,\ldots,0),(-1,0,1,\ldots,0),\ldots,(-1,0,0,\ldots,1)\}$$

који су очигледно сви међусобно линеарно независни. Пошто скуп линеарно независних вектора има $n-1$ чланова, *димензија* датог потпростора $\mathbb{S}$ износи $n-1$: $\dim\mathbb{S}=n-1$.

(4.3) Показати да у простору $\mathbb{R}^{22}$ *нису потпростори*

(а) скуп матрица чије су *детерминанте једнаке нули*;

(б) скуп *идемпотентних* матрица: $\hat{A}^2 = \hat{A}$.

(а) Нека су дате две матрице чије су детерминанте једнаке нули

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Да би скуп био *затворен* у односу на сабирање матрица и множење матрица скаларом, чиме би представљао потпростор, линеарна комбинација ове две матрице мора имати детерминанту једнаку нули

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

што очигледно није случај

$$\det(\alpha_1 A + \alpha_2 B) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \neq 0$$

те скуп матрица чије су детерминанте једнаке нули *није потпростор*.

* * *

(б) Услов да матрица буде идемпотентна јесте да се не може степеновати: $\hat{A}^2 = \hat{A}$. Скуп оваквих матрица није затворен на бинарну операцију множења матрица скаларом

$$\left(\alpha \hat{A}\right)^2 = \alpha^2 \hat{A}^2 = \alpha^2 \hat{A} \neq \alpha \hat{A}$$

те самим тим не може бити потпростор.

(4.4) Одредити димензију и базис *суме* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ простора $\mathbb{R}^4$

(а) $$\begin{array}{l} \mathbb{W}_1 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1 = (0,1,1,1), |w_2\rangle_1 = (1,1,1,2), |w_3\rangle_1 = (-2,0,1,1)\right) \\ \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2 = (-1,3,2,-1), |w_2\rangle_2 = (1,1,0,-1)\right) \end{array};$$

(б) $$\begin{array}{l} \mathbb{W}_1 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1 = (2,-5,3,4), |w_2\rangle_1 = (1,2,0,-7), |w_3\rangle_1 = (3,-6,2,5)\right) \\ \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2 = (2,0,-4,6), |w_2\rangle_2 = (1,1,1,1), |w_3\rangle_2 = (3,3,1,5)\right) \end{array}.$$

По дефиницији, сума два потпростора је *линеал* (скуп свих вектора који су линеарна комбинација горе наведених вектора) *над унијом* потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2),$$

а поменуту унију чине сви вектори из оба потпростора који су линеарна комбинација задатих вектора; наравно, како сви задати вектори чине *базисе* потпростора којима припадају, то исто морају чинити и у суми два потпростора, што значи да сви морају бити *линеарно независни*, што ће сада бити проверено.

(а) Прво се проверава линеарна независност три вектора из првог потпростора.

Како први вектор није нулти, он може бити део потенцијалног базиса

$$|w_1\rangle_1 = (0,1,1,1) \neq (0,0,0,0) = |0\rangle.$$

Да ли су први и други задати вектор (такође ненулти) линеарно независни? Формира се њихова линеарна комбинација

$$\begin{aligned} \alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 = |0\rangle \;&\Leftrightarrow\; \alpha(0,1,1,1) + \beta(1,1,1,2) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow\; (\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha+2\beta) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Две уређене четворке једнаке су међусобно ако су им једнаке одговарајуће компоненте. Из горње једнакости следи систем једначина

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \underline{\alpha+2\beta = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \underline{\alpha+2\beta = 0} \end{cases}$$

кога чак не треба ни решавати. Како су коефицијенти у линеарној комбинацији прва два дата вектора понаособ једнаки нули, то су $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ *линеарно независни*, те су добри кандидати за базис.

Сада се проверава да ли су прва три вектора линеарно независна. Линеарна комбинација истих се изједначи с нултим вектором

$$\begin{aligned} \alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 + \gamma|w_3\rangle_1 = |0\rangle \;&\Leftrightarrow\; \alpha(0,1,1,1) + \beta(1,1,1,2) + \gamma(-2,0,1,1) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow\; (\beta-2\gamma, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\beta+\gamma) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases} \beta-2\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2\gamma \\ \alpha=-\beta=-2\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=2\gamma \\ \alpha=-2\gamma \\ \cancel{-2\gamma}+\cancel{2\gamma}+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

кога је веома лако решити. Будући да су коефицијенти у линеарној комбинацији прва три дата вектора понаособ једнаки нули, то су $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ *линеарно независни*, те су добри кандидати за базис уније потпростора.

Сада се овим линеарно независним векторима додаје први вектор другог потпростора $|w_1\rangle_2$ па се проверава линеарна независност четири вектора

$$\begin{aligned} & \alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1+\delta|w_1\rangle_2=|0\rangle \\ \Leftrightarrow\ & \alpha(0,1,1,1)+\beta(1,1,1,2)+\gamma(-2,0,1,1)+\delta(-1,3,2,-1)=(0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (\beta-2\gamma-\delta,\alpha+\beta+3\delta,\alpha+\beta+\gamma+2\delta,\alpha+2\beta+\gamma-\delta)=(0,0,0,0) \end{aligned}$$

Одговарајуће компоненте леве и десне уређене четворке изједначавају се још једном, дајући тако систем једначина

$$\begin{cases} \beta-2\gamma-\delta=0 \\ \alpha+\beta+3\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma-\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta-2\gamma=\delta \\ \alpha+\beta+3\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta-2\gamma=\alpha+2\beta+\gamma \\ \alpha+\beta+3\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta-\beta+2\gamma+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+3\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-3\gamma \\ \alpha+\beta=-3\delta \\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ \alpha+\beta=-3\delta \\ \alpha+\beta+\delta+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\delta=\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ \alpha+\beta=-3\delta \\ \alpha+\beta+3\delta=0 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ \alpha+\beta=-3\delta \\ -\alpha-\beta-3\delta=0 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ \alpha+\beta=-3\delta \\ \beta-3\delta=0 \\ \alpha=-2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ \alpha+\beta+3\delta=0 \\ \beta=3\delta \\ \alpha=-6\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ -6\delta+3\delta+3\delta=0 \\ \beta=3\delta \\ \alpha=-6\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ (-6+3+3)\delta=0 \\ \beta=3\delta \\ \alpha=-6\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=\delta \\ 0\cdot\delta=0 \\ \beta=3\delta \\ \alpha=-6\delta \end{cases}$$

Како сви коефицијенти линеарне комбинације зависе од коефицијента δ, а он може бити било који реалан број, то је скуп вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$ *линеарно зависан*, те се додати вектор $|w_1\rangle_2$ мора одбацити.

Остао је још један покушај, да се скупу линеарно независних вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ дода други вектор другог потпростора $|w_2\rangle_2$ те да се провери линеарна независност тако добијеног скупа. Прво се њихова линеарна комбинација изједначи са нултим вектором

$$\begin{aligned}&\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1+\delta|w_2\rangle_2=|0\rangle\\ \Leftrightarrow\ &\alpha(0,1,1,1)+\beta(1,1,1,2)+\gamma(-2,0,1,1)+\delta(1,1,0,-1)=(0,0,0,0)\\ \Leftrightarrow\ &(\beta-2\gamma+\delta,\alpha+\beta+\delta,\alpha+\beta+\gamma,\alpha+2\beta+\gamma-\delta)=(0,0,0,0)\end{aligned}$$

одакле следи систем једначина

$$\begin{cases}\beta-2\gamma+\delta=0\\ \alpha+\beta+\delta=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\beta+\gamma-\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\beta+2\gamma-\delta=0\\ \alpha+\beta+\delta=0\\ -\alpha-\beta-\gamma=0\\ \alpha+2\beta+\gamma=\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\beta+2\gamma-\delta=0\\ \alpha+2\gamma=0\\ -\alpha-\beta-\gamma=0\\ \beta=\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta-2\gamma+\delta=0\\ \alpha=-2\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta=\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\delta-2\gamma+\delta=0\\ \alpha=-2\gamma\\ -2\gamma+\beta+\gamma=0\\ \beta=\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\delta=2\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ -\gamma+\beta=0\\ \beta=\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ \beta=\gamma\\ \beta=\delta=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta=\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ \beta=\gamma\\ \alpha+2\beta+\gamma-\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\delta=\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ \beta=\gamma\\ -2\gamma+2\gamma+\gamma-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ \beta=\gamma\\ 0\cdot\gamma=0\end{cases}$$

Како сви коефицијенти линеарне комбинације зависе од коефицијента γ, а он може бити било који реалан број, то је скуп вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|w_2\rangle_2$ *линеарно зависан*, те се додати вектор $|w_2\rangle_2$ мора одбацити.

Како линеарно независних вектора има само три, они чине *базис* $\{|w_1\rangle_1,|w_2\rangle_1,|w_3\rangle_1\}$ *тродимензионалне* суме датих потпростора, $\dim(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)=3$.

* * *

(б) Као и у претходном случају, прво се проверава линеарна независност три вектора из првог потпростора.

Први вектор очигледно није нулти, те може бити део потенцијалног базиса

$$|w_1\rangle_1=(2,-5,3,4)\neq(0,0,0,0)=|0\rangle.$$

Сада се проверава да ли су први и други задати вектор линеарно независни, изједначавањем њихове линеарне комбинације са нултим вектором

$$\begin{aligned}\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1=|0\rangle\ &\Leftrightarrow\ \alpha(2,-5,3,4)+\beta(1,2,0,-7)=(0,0,0,0)\\ &\Leftrightarrow\ (2\alpha+\beta,-5\alpha+2\beta,3\alpha,4\alpha-7\beta)=(0,0,0,0)\end{aligned}$$

Две уређене четворке једнаке су међусобно ако су им једнаке одговарајуће компоненте. Из горње једнакости следи систем једначина

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ -5\alpha+2\beta=0 \\ 3\alpha=0 \\ 4\alpha-7\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ -5\alpha+2\beta=0 \\ \alpha=0 \\ 4\alpha-7\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ 2\beta=0 \\ \alpha=0 \\ 7\beta=0 \end{cases}$$

кога чак не треба ни решавати. Како су коефицијенти у линеарној комбинацији прва два дата вектора понаособ једнаки нули, то су $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ *линеарно независни*, те су добри кандидати за базис.

Сада се проверава да ли су прва три вектора линеарно независна. Формира се њихова линеарна комбинација

$$\begin{aligned} \alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1=|0\rangle &\Leftrightarrow \alpha(2,-5,3,4)+\beta(1,2,0,-7)+\gamma(3,-6,2,5)=(0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (2\alpha+\beta+3\gamma,-5\alpha+2\beta-6\gamma,3\alpha+2\gamma,4\alpha-7\beta+5\gamma)=(0,0,0,0) \end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma=0 \;\; /\cdot(-2) \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ 3\alpha+2\gamma=0 \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha-2\beta-6\gamma=0 \\ 5\alpha-2\beta+6\gamma=0 \\ 3\alpha=-2\gamma \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha-2\beta-6\gamma=0 \\ 5\alpha-2\beta+6\gamma=0 \\ \alpha=-\frac{2}{3}\gamma \\ -9\beta-\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma=0 \\ 5\alpha-2\beta+6\gamma=0 \\ \alpha=-\frac{2}{3}\gamma \\ \gamma=-9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma=0 \\ 5\alpha-2\beta+6\gamma=0 \\ \alpha=-\frac{2}{3}(-9\beta)=6\beta \\ \gamma=-9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\beta+\beta-27\gamma=0 \\ 5\alpha-2\beta+6\gamma=0 \\ \alpha=6\beta \\ \gamma=-9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14\beta=0 \\ 5\alpha-2\beta+6\gamma=0 \\ \alpha=6\beta \\ \gamma=-9\beta \end{cases}$$

Будући да коефицијенти α и γ линеарне комбинације зависе од коефицијента β, а он мора бити нула, то су $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ *линеарно независни*, те су добри кандидати за базис уније потпростора.

У следећем кораку се додаје први вектор другог потпростора $|w_1\rangle_2$, а затим се проверава линеарна независност четири вектора

$$\begin{aligned} &\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1+\delta|w_1\rangle_2=|0\rangle \\ \Leftrightarrow\;& \alpha(2,-5,3,4)+\beta(1,2,0,-7)+\gamma(3,-6,2,5)+\delta(2,0,-4,6)=(0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\;& (2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta,-5\alpha+2\beta-6\gamma,3\alpha+2\gamma-4\delta,4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta)=(0,0,0,0) \end{aligned}$$

Одговарајуће компоненте леве и десне уређене четворке изједначавају се још једном, дајући тако систем једначина

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ 3\alpha+2\gamma-4\delta=0 \quad /\cdot 3 \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ 9\alpha+6\gamma-12\delta=0 \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ 4\alpha+2\beta-12\delta=0 \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta=6\delta \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\delta+3\gamma+2\delta=0 \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta=6\delta \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\gamma=-8\delta \\ -5\alpha+2\beta-6\gamma=0 \\ \beta=6\delta-2\alpha \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6\gamma=16\delta \\ -5\alpha+2\beta+16\delta=0 \\ 2\beta=12\delta-4\alpha \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ -5\alpha+12\delta-4\alpha+19\delta=0 \\ 2\beta=12\delta-4\alpha \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ -9\alpha+31\delta=0 \\ \beta=6\delta-2\alpha \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ \alpha=\frac{31}{9}\delta \\ \beta=6\delta-2\frac{31}{9}\delta \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ \alpha=\frac{31}{9}\delta \\ \beta=\frac{54}{9}\delta-\frac{62}{9}\delta \\ 4\alpha-7\beta+5\gamma+6\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ \alpha=\frac{31}{9}\delta \\ \beta=-\frac{8}{9}\delta \\ 4\frac{31}{9}\delta+7\frac{8}{9}\delta-5\frac{8}{3}\delta+6\delta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ \alpha=\frac{31}{9}\delta \\ \beta=-\frac{8}{9}\delta \\ \left(\frac{124}{9}+\frac{56}{9}-\frac{40\cdot 3}{9}+\frac{6\cdot 9}{9}\right)\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ \alpha=\frac{31}{9}\delta \\ \beta=-\frac{8}{9}\delta \\ \frac{124+56-120+54}{9}\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\frac{8}{3}\delta \\ \alpha=\frac{31}{9}\delta \\ \beta=-\frac{8}{9}\delta \\ \frac{114}{9}\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \delta=0 \end{cases}$$

Како сви коефицијенти линеарне комбинације зависе од коефицијента δ, а он мора бити нула и ништа друго, то је скуп вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$ *линеарно независан*. То значи да поменути вектори чине *базис* $\{|w_1\rangle_1, |w_2\rangle_1, |w_3\rangle_1, |w_1\rangle_2\}$ *четвородимензионалне* суме датих потпростора, $\dim(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)=4$.

(4.5) Одредити базисе *суме* и *пресека* два потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ простора $\mathbb{U}$

(а) $\mathbb{U}=\mathbb{R}^3$: $\begin{array}{l}\mathbb{W}_1=\mathbb{L}\big((2,1,0),(1,2,3),(-5,-2,1)\big)\\ \mathbb{W}_2=\mathbb{L}\big((1,1,2),(-1,3,0),(2,0,3)\big)\end{array}$;

(б) $\mathbb{U}=\mathbb{R}^4$: $\begin{array}{l}\mathbb{W}_1=\mathbb{L}\big((1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\big)\\ \mathbb{W}_2=\mathbb{L}\big((1,-1,-1,1),(2,-2,0,0),(3,-1,1,-1)\big)\end{array}$;

(в) $\mathbb{U}=\mathbb{R}^{22}$: $\begin{array}{l}\mathbb{W}_1=\mathbb{L}\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\1&-2\end{bmatrix}\right)\\ \mathbb{W}_2=\mathbb{L}\left(\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\-2&-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&5\end{bmatrix}\right)\end{array}$.

(а) Да ли вектори $(2,1,0)$, $(1,2,3)$, $(-5,-2,1)$ потпростора $\mathbb{W}_1$ чине базис?

Први вектор $(2,1,0)$ очигледно је различит од нултог, те је добар кандидат да буде један од базисних вектора

$$|w_1\rangle_1=(2,1,0)\neq(0,0,0)=|0\rangle.$$

Да ли су прва два вектора линеарно независна? Прво треба формирати линеарну комбинацију и изједначити је са нултим вектором

$$\begin{aligned}\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1=|0\rangle \ &\Leftrightarrow\ \alpha(2,1,0)+\beta(1,2,3)=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow\ (2\alpha+\beta,\alpha+2\beta,3\beta)=(0,0,0)\end{aligned}$$

Из горњег израза следи следећи систем једначина

$$\underline{\begin{cases}2\alpha+\beta=0\\ \alpha+2\beta=0\\ 3\beta=0\end{cases}}\ \Leftrightarrow\ \underline{\begin{cases}2\alpha+\beta=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\end{cases}}$$

кога чак не треба ни решавати. Како су коефицијенти у линеарној комбинацији прва два дата вектора понаособ једнаки нули, то су $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ *линеарно независни*, те су добри кандидати за базис.

Сада се проверава да ли су прва три вектора линеарно независна. Њихова линеарна комбинација се изједначи са нултим вектором

$$\begin{aligned}\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1=|0\rangle \ &\Leftrightarrow\ \alpha(2,1,0)+\beta(1,2,3)+\gamma(-5,-2,1)=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow\ (2\alpha+\beta-5\gamma,\alpha+2\beta-2\gamma,3\beta+\gamma)=(0,0,0)\end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених тројки с леве и десне стране добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-5\gamma=0 \\ \alpha+2\beta-2\gamma=0 \\ 3\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-5\gamma=0 \\ \alpha+2\beta-2\gamma=0 \\ \gamma=-3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-5\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+6\beta=0 \\ \gamma=-3\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-5\gamma=0 \\ \alpha=-8\beta \\ \gamma=-3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-16+1+15)\beta=0 \\ \alpha=-8\beta \\ \gamma=-3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\beta=0 \\ \alpha=-8\beta \\ \gamma=-3\beta \end{cases}$$

Како коефицијенти α и β зависе од γ, а он може бити било који реалан број, то су $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ *линеарно зависни*, те не могу да формирају базис потпростора $\mathbb{W}_1$. Другим речима, први задати потпростор је *дводимензионалан*, $\dim\mathbb{W}_1=2$, пошто само два линеарно независна вектора $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ чине његов *базис*.

* * *

Сада се проверава да ли вектори $(1,1,2)$, $(-1,3,0)$, $(2,0,3)$ потпростора $\mathbb{W}_2$ чине базис.

Први вектор $(1,1,2)$, наравно, није нулти, те може бити узет за један од базисних вектора

$$|w_1\rangle_2=(1,1,2)\neq(0,0,0)=|0\rangle.$$

За проверу линеарне независности прва два вектора се формира линеарна комбинација и изједначи се са нултим вектором

$$\alpha|w_1\rangle_2+\beta|w_2\rangle_2=|0\rangle \Leftrightarrow \alpha(1,1,2)+\beta(-1,3,0)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta,\alpha+3\beta,2\alpha)=(0,0,0)$$

Из горњег израза следи следећи систем једначина

$$\begin{cases} \alpha-\beta=0 \\ \alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta=0 \\ \alpha+3\beta=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

чија су решења сасвим очигледна. Како су коефицијенти у линеарној комбинацији прва два дата вектора понаособ једнаки нули, то су $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$ *линеарно независни*, те су добри кандидати за базис.

Да би се проверило да ли су прва три вектора линеарно независна, линеарна комбинација истих се изједначава са нултим вектором

$$\alpha|w_1\rangle_2+\beta|w_2\rangle_2+\gamma|w_3\rangle_2=|0\rangle \Leftrightarrow \alpha(1,1,2)+\beta(-1,3,0)+\gamma(2,0,3)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta+2\gamma,\alpha+3\beta,2\alpha+3\gamma)=(0,0,0)$$

Како су одговарајуће компоненте уређених тројки с леве и десне стране једнаке, следи систем једначина

$$\begin{cases} \alpha-\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha+3\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+2\gamma=0 \\ \alpha=-3\beta \\ 2\alpha=-3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+2\gamma=0 \\ \alpha=-3\beta \\ -6\beta=-3\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+2\gamma=0 \\ \alpha=-3\beta \\ \gamma=2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3-1+4)\beta=0 \\ \alpha=-3\beta \\ \gamma=2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\beta=0 \\ \alpha=-3\beta \\ \gamma=2\beta \end{cases}$$

Коефицијенти α и γ зависе од β који је произвољан реалан број, те су $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ *линеарно зависни*, те не могу да формирају базис потпростора $\mathbb{W}_2$. Другим речима, други задати потпростор такође је *дводимензионалан*, $\dim\mathbb{W}_2=2$, јер само два линеарно независна вектора $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$ чине његов *базис*.

* * *

Да би се могао уобличити базис *уније* потпростора $\mathbb{W}_1\cup\mathbb{W}_2$, базису првог потпростора биће додат први вектор другог потпростора, па ће се проверити да ли је тако добијени скуп вектора линеарно независан. Као и увек, прво се линеарна комбинација изједначи са нултим вектором

$$\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_1\rangle_2=|0\rangle \Leftrightarrow \alpha(2,1,0)+\beta(1,2,3)+\gamma(1,1,2)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (2\alpha+\beta+\gamma,\alpha+2\beta+\gamma,3\beta+2\gamma)=(0,0,0)$$

а потом се реши систем једначина који одатле следи

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=0 \;/\cdot 3 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 3\beta+2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha+3\beta+3\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 3\beta=-2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha-2\gamma+3\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 3\beta=-2\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-6\alpha \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 3\beta=-2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-6\alpha \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 3\beta=12\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-6\alpha \\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ \beta=4\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=-6\alpha \\ (1+8-6)\alpha=0 \\ \beta=4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-6\alpha \\ 3\alpha=0 \\ \beta=4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

одакле је јасно да су вектори $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$ *линеарно независни* те да чине базис уније потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

Сада се претходној, линеарно независној групи вектора додаје други вектор потпростора $\mathbb{W}_2$, и проверава се да ли је тако добијен скуп вектора линеарно независан, формирањем линеарне комбинације

$$\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_1\rangle_2+\delta|w_2\rangle_2=|0\rangle \Leftrightarrow \alpha(2,1,0)+\beta(1,2,3)+\gamma(1,1,2)+\delta(-1,3,0)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (2\alpha+\beta+\gamma-\delta,\alpha+2\beta+\gamma+3\delta,3\beta+2\gamma)=(0,0,0)$$

Изједначавањем одговарајућих коефицијената следи систем

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\ \alpha+2\beta+\gamma+3\delta=0\\ 3\beta+2\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ \alpha+2\beta+\gamma+3\delta=0\\ 3\beta+2\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ \alpha+2\beta-2\alpha-\beta+\delta+3\delta=0\\ 3\beta-4\alpha-2\beta+2\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ -\alpha+\beta+4\delta=0\\ -4\alpha+\beta+2\delta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ \alpha=\beta+4\delta\\ -4\alpha+\beta+2\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ \alpha=\beta+4\delta\\ \beta=4\alpha-2\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ \alpha=4\alpha-2\delta+4\delta\\ \beta=4\alpha-2\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\gamma=-2\alpha-\beta+\delta\\ 3\alpha=-2\delta\\ \beta=4\alpha-2\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\gamma=-4\alpha-2\beta+2\delta\\ -3\alpha=2\delta\\ \beta=7\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\gamma=-4\alpha-14\alpha-3\alpha\\ -3\alpha=2\delta\\ \beta=7\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\gamma=-21\alpha\\ 2\delta=-3\alpha\\ \beta=7\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\alpha+\beta+\gamma-\delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta+2\gamma-2\delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha+14\alpha-21\alpha+3\alpha=0 \Leftrightarrow 0\cdot\alpha=0$$

из кога је јасно да је добијени скуп вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$ *линеарно зависан*, те да не може да формира базис уније потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

Пошто је трећи вектор $|w_3\rangle_2$ другог потпростора линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$, он не може бити кандидат за базис уније потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, те нема потребе проверавати да ли је он линеарно независан са векторима $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$.

Коначно, базис уније дата два потпростора чине укупно три вектора, $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$, а поменута унија је *тродимензионална*, $\dim(\mathbb{W}_1\cup\mathbb{W}_2)=3$.

* * *

Пресек два дводимензионална потпростора $\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2$ јесте *једнодимензионалан* потпростор, а његов базис чини *само један вектор*, који мора припадати обема потпросторима, односно који се може написати као линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ из првог $\mathbb{W}_1$, али и као линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$ из другог $\mathbb{W}_2$ потпростора.

Нека тражени вектор има компоненте $|v^{\text{pres}}\rangle=(a,b,c)$. Он се прво пише као линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ из првог $\mathbb{W}_1$ потпростора

$$\left|v^{\text{pres}}\right\rangle_1 = \alpha\left|w_1\right\rangle_1 + \beta\left|w_2\right\rangle_1 \Leftrightarrow (a,b,c) = \alpha(2,1,0) + \beta(1,2,3)$$
$$\Leftrightarrow (a,b,c) = (2\alpha+\beta, \alpha+2\beta, 3\beta)$$

Изједначавањем компоненти уређених тројки с леве и десне стране следи

$$\begin{cases} a = 2\alpha+\beta \\ b = \alpha+2\beta \\ c = 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\alpha+\beta \\ b = \alpha+2\beta \\ \beta = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\alpha+\dfrac{c}{3} \\ b = \alpha+2\dfrac{c}{3} \\ \beta = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\alpha+\dfrac{c}{3} \\ \alpha = b-\dfrac{2c}{3} \\ \beta = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\left(b-\dfrac{2c}{3}\right)+\dfrac{c}{3} \\ \alpha = b-\dfrac{2c}{3} \\ \beta = \dfrac{c}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b-\dfrac{4c}{3}+\dfrac{c}{3} \\ \alpha = b-\dfrac{2c}{3} \\ \beta = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b-c \\ \alpha = b-\dfrac{2c}{3} \\ \beta = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left|v^{\text{pres}}\right\rangle_1 = (2b-c,b,c)$$

Потом се вектор $\left|v^{\text{pres}}\right\rangle = (a,b,c)$ пише као линеарна комбинација вектора $\left|w_1\right\rangle_2$ и $\left|w_2\right\rangle_2$ из другог $\mathbb{W}_2$ потпростора

$$\left|v^{\text{pres}}\right\rangle_2 = \gamma\left|w_1\right\rangle_2 + \delta\left|w_2\right\rangle_2 \Leftrightarrow (a,b,c) = \gamma(1,1,2) + \delta(-1,3,0)$$
$$\Leftrightarrow (a,b,c) = (\gamma-\delta, \gamma+3\delta, 2\gamma)$$

Изједначавањем компоненти уређених тројки с леве и десне стране добија се

$$\begin{cases} a = \gamma-\delta \\ b = \gamma+3\delta \\ c = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \gamma-\delta \\ b = \gamma+3\delta \\ \gamma = \dfrac{c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2}-\delta \\ b = \dfrac{c}{2}+3\delta \\ \gamma = \dfrac{c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2}-\delta \\ \delta = \dfrac{1}{3}\left(b-\dfrac{c}{2}\right) \\ \gamma = \dfrac{c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{6} \\ \delta = \dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{6} \\ \gamma = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2c-b}{3} \\ \delta = \dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{6} \\ \gamma = \dfrac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow \left|v^{\text{pres}}\right\rangle_2 = \left(\dfrac{2c-b}{3}, b, c\right)$$

Како је реч о истом вектору представљеном у два базиса, следи

$$\left|v^{\text{pres}}\right\rangle_1 = \left|v^{\text{pres}}\right\rangle_2 \Rightarrow (2b-c,b,c) = \left(\frac{2c-b}{3}, b, c\right) \Rightarrow 2b-c = \frac{2c-b}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ 6b-3c=2c-b\ \Leftrightarrow\ 6b+b=2c+3c\ \Leftrightarrow\ 7b=5c\ \Rightarrow\ \begin{cases} a=2b-c=3 \\ b=5 \\ c=7 \end{cases}$$

чиме је добијен базни вектор $\left|v^{\text{pres}}\right\rangle=(3,5,7)$ *једнодимензионалног* $\dim\left(\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2\right)=1$ *пресека* два дводимензионална потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

(б) Прво, да ли вектори $(1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$ потпростора $\mathbb{W}_1$ чине базис?

Вектор $(1,1,1,1)$ очигледно није нулти, те може да буде први од базисних вектора

$$\left|w_1\right\rangle_1=(1,1,1,1)\neq(0,0,0,0)=\left|0\right\rangle.$$

Да би прва два вектора била линеарно независна, коефицијенти у линеарној комбинацији морају бити понаособ једнаки нули

$$\alpha\left|w_1\right\rangle_1+\beta\left|w_2\right\rangle_1=\left|0\right\rangle\ \Leftrightarrow\ \alpha(1,1,1,1)+\beta(1,1,-1,-1)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(0,0,0,0)$$

Из горњег израза добија се систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha=\beta\\ \alpha=\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta+\beta=0\\ \beta+\beta=0\\ \alpha=\beta\\ \alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=0\\ 2\beta=0\\ \alpha=\beta\\ \alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \beta=0\\ \alpha=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

чија су решења очигледна. Јасно је да су $\left|w_1\right\rangle_1$ и $\left|w_2\right\rangle_1$ *линеарно независни*, те чине један дводимензионални базис.

Да ли су прва три вектора линеарно независна? Њихову линеарну комбинацију треба изједначити са нултим вектором, што даје

$$\alpha\left|w_1\right\rangle_1+\beta\left|w_2\right\rangle_1+\gamma\left|w_3\right\rangle_1=\left|0\right\rangle\ \Leftrightarrow\ \alpha(1,1,1,1)+\beta(1,1,-1,-1)+\gamma(1,-1,1,-1)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta-\gamma,\alpha-\beta+\gamma,\alpha-\beta-\gamma)=(0,0,0,0)$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta=\gamma\\ \alpha-\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\gamma=0\\ \alpha+\beta=\gamma\\ \alpha-\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=-\beta\\ \alpha-\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=-\beta\\ -\beta-\beta=0\\ -\beta-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=-\beta\\ -2\beta=0\\ -2\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \beta=0\end{cases}$$

Сва три коефицијента линеарне комбинације једнака су нули, вектори $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ су *линеарно независни*, те представљају базис тродимензионалног ($\dim \mathbb{W}_1 = 3$) потпростора $\mathbb{W}_1$.

* * *

Друго, да ли вектори $(1,-1,-1,1)$, $(2,-2,0,0)$, $(3,-1,1,-1)$ потпростора $\mathbb{W}_2$ чине базис?

Како први вектор $(1,-1,-1,1)$ није нулти, он јесте један од базисних вектора

$$|w_1\rangle_2 = (1,-1,-1,1) \neq (0,0,0,0) = |0\rangle .$$

За проверу линеарне независности прва два вектора формира се линеарна комбинација и изједначи са нултим вектором

$$\begin{aligned} \alpha|w_1\rangle_2 + \beta|w_2\rangle_2 = |0\rangle \;&\Leftrightarrow\; \alpha(1,-1,-1,1)+\beta(2,-2,0,0)=(0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow\; (\alpha+2\beta,-\alpha-2\beta,-\alpha,\alpha)=(0,0,0) \end{aligned}$$

Из горњег израза следи следећи систем једначина

$$\underline{\begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ -\alpha-2\beta=0 \\ -\alpha=0 \\ \alpha=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} 2\beta=0 \\ -2\beta=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha=0 \end{cases}}$$

који се сам решава. Пошто су коефицијенти линеарне комбинације понаособ једнаки нули, то су вектори $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$ *линеарно независни*, те чине дводимензионални базис.

Сада се проверава линеарна независност сва три дата вектора потпростора $\mathbb{W}_2$, тако што се линеарна комбинација истих изједначава са нултим вектором

$$\begin{aligned} \alpha|w_1\rangle_2 + \beta|w_2\rangle_2 + \gamma|w_3\rangle_2 = |0\rangle \;&\Leftrightarrow\; \alpha(1,-1,-1,1)+\beta(2,-2,0,0)+\gamma(3,-1,1,-1)=(0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow\; (\alpha+2\beta+3\gamma,-\alpha-2\beta-\gamma,-\alpha+\gamma,\alpha-\gamma)=(0,0,0,0) \end{aligned}$$

Како су одговарајуће компоненте уређених тројки с леве и десне стране једнаке, следи систем једначина

$$\underline{\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ -\alpha-2\beta-\gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ -\alpha-2\beta-\gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha=\gamma \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ 2\gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha=\gamma \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ \gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} 2\beta=0 \\ \gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \beta=0 \\ \gamma=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases}}$$

Коефицијенти α, β и γ су сваки понаособ једнаки нули, вектори $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ су *линеарно независни*, те чине базис другог задатог, такође *тродимензионалног* ($\dim \mathbb{W}_2 = 3$), потпростора $\mathbb{W}_2$.

* * *

Да би се могао добити базис *уније* потпростора $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$, базису првог потпростора биће додат први вектор другог потпростора па ће се проверити да ли је тако добијени скуп вектора линеарно независан - линеарна комбинација вектора изједначи се са нултим вектором

$$\alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 + \gamma|w_3\rangle_1 + \delta|w_1\rangle_2 = |0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,1,-1,-1) + \gamma(1,-1,1,-1) + \delta(1,-1,-1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha+\beta+\gamma+\delta, \alpha+\beta-\gamma-\delta, \alpha-\beta+\gamma-\delta, \alpha-\beta-\gamma+\delta) = (0,0,0,0)$$

а потом се реши систем једначина који одатле следи

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \alpha+\beta-\gamma-\delta=0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ \alpha-\beta-\gamma+\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ 2\alpha+2\beta=0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ 2\alpha-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ 2\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \beta=-\alpha \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ \alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma+\delta=0 \\ \beta=0 \\ \gamma-\delta=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma+\delta=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\delta=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

одакле је јасно да су вектори $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$ *линеарно независни* те да чине базис четвородимензионалне, $\dim(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2) = 4$, уније потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$. Поменута унија не може имати број димензија већи од четири, будући да су задати потпростори подскупови простора $\mathbb{U} = \mathbb{R}^4$.

* * *

Пресек два тродимензионална потпростора $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ јесте *дводимензионалан* потпростор, а његов базис ће чинити *два вектора* који морају припадати и једном и другом потпростору, тј. они који су линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ из првог $\mathbb{W}_1$, али и линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ из другог $\mathbb{W}_2$ потпростора.

Нека два тражена вектора имају компоненте $\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle = (a,b,c,d)$. Они се прво пишу као линеарна комбинација вектора $\left|w_1\right\rangle_1$, $\left|w_2\right\rangle_1$ и $\left|w_3\right\rangle_1$ из првог $\mathbb{W}_1$ потпростора

$$\begin{aligned}\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_1 = \alpha\left|w_1\right\rangle_1 + \beta\left|w_2\right\rangle_1 + \gamma\left|w_3\right\rangle_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,1,-1,-1) + \gamma(1,-1,1,-1) \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta-\gamma, \alpha-\beta+\gamma, \alpha-\beta-\gamma)\end{aligned}.$$

Изједначавањем компоненти уређених тројки с леве и десне стране следи

$$\begin{cases} a = \alpha+\beta+\gamma \\ b = \alpha+\beta-\gamma \,/\cdot(-1) \\ c = \alpha-\beta+\gamma \\ d = \alpha-\beta-\gamma \,/\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha+\beta+\gamma \\ -b = -\alpha-\beta+\gamma \\ c = \alpha-\beta+\gamma \\ -d = -\alpha+\beta+\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = 2\gamma \\ b = \alpha+\beta-\gamma \\ c-d = 2\gamma \,/\cdot(-1) \\ d = \alpha-\beta-\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = 2\gamma \\ b = \alpha+\beta-\gamma \\ -c+d = -2\gamma \\ d = \alpha-\beta-\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b-c+d = 0 \\ b = \alpha+\beta-\gamma \\ c-d = 2\gamma \\ d = \alpha-\beta-\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a-b+d \\ b = \alpha+\beta-\gamma \\ c-d = 2\gamma \\ d = \alpha-\beta-\gamma \end{cases} \Rightarrow \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_1 = (a,b,a-b+d,d)$$

Потом се вектори $\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle = (a,b,c,d)$ пишу као линеарна комбинација вектора $\left|w_1\right\rangle_2$, $\left|w_2\right\rangle_2$ и $\left|w_3\right\rangle_2$ из другог $\mathbb{W}_2$ потпростора

$$\begin{aligned}\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_2 = \gamma\left|w_1\right\rangle_2 + \delta\left|w_2\right\rangle_2 + \varepsilon\left|w_3\right\rangle_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) = \gamma(1,-1,-1,1) + \delta(2,-2,0,0) + \varepsilon(3,-1,1,-1) \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) = (\gamma+2\delta+3\varepsilon, -\gamma-2\delta-\varepsilon, -\gamma+\varepsilon, \gamma-\varepsilon)\end{aligned}.$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се

$$\begin{cases} \varepsilon+2\mu+3\eta-2\xi = 0 \\ -\varepsilon-2\mu-\eta = 0 \\ -\varepsilon+\eta-\xi = 0 \\ \varepsilon-\eta+\xi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \gamma+2\delta+3\varepsilon \\ b = -\gamma-2\delta-\varepsilon \\ c = -\gamma+\varepsilon \\ -d = -\gamma+\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \gamma+2\delta+3\varepsilon \\ b = -\gamma-2\delta-\varepsilon \\ c = -d \\ d = \gamma-\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_2 = (a,b,-d,d)$$

Како је реч о истом вектору представљеном у два базиса, следи

$$\begin{aligned}\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_1 = \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_2 \quad &\Rightarrow \quad (a,b,a-b+d,d) = (a,b,-d,d) \quad \Rightarrow \quad a-b+d = -d \\ &\Leftrightarrow \quad a = b-2d \quad \Leftrightarrow \quad \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle = (b-2d,b,-d,d)\end{aligned}.$$

Да би се добила два различита вектора, прво ће се претпоставити да је $b=0$ и $d=1$ што даје први вектор $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle = (-2,0,-1,1)$; потом се претпостави да је $b=1$ и $d=1$, чиме се добија други вектор $\left|v_2^{\text{pres}}\right\rangle = (-1,1,-1,1)$ *дводимензионалног* $\dim\left(\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2\right) = 2$ *пресека* два тродимензионална потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

* * *

Сада се проверава да ли је први вектор пресека $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle$ линеарна комбинација датих вектора $\left|w_1\right\rangle_1$, $\left|w_2\right\rangle_1$ и $\left|w_3\right\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$

$$\alpha\left|w_1\right\rangle_1+\beta\left|w_2\right\rangle_1+\gamma\left|w_3\right\rangle_1+\delta\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle=\left|0\right\rangle$$
$$\Leftrightarrow\quad \alpha(1,1,1,1)+\beta(1,1,-1,-1)+\gamma(1,-1,1,-1)+\delta(-2,0,-1,1)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\quad (\alpha+\beta+\gamma-2\delta,\alpha+\beta-\gamma,\alpha-\beta+\gamma-\delta,\alpha-\beta-\gamma+\delta)=(0,0,0,0)$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0\\ \alpha-\beta-\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ 2\alpha-\delta=0\\ \alpha-\beta-\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \delta=2\alpha\\ \alpha-\beta-\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \delta=2\alpha\\ \alpha-\beta-\gamma+2\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \delta=2\alpha\\ 3\alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \delta=2\alpha\\ \beta=3\alpha-\gamma\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+3\alpha-\gamma-\gamma=0\\ \delta=2\alpha\\ \beta=3\alpha-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ 4\alpha-2\gamma=0\\ \delta=2\alpha\\ \beta=3\alpha-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-2\delta=0\\ \gamma=2\alpha\\ \delta=2\alpha\\ \beta=3\alpha-2\alpha=\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\alpha+2\alpha-4\alpha=0\\ \gamma=2\alpha\\ \delta=2\alpha\\ \beta=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4-4)\alpha=0\\ \gamma=2\alpha\\ \delta=2\alpha\\ \beta=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\cdot\alpha=0\\ \gamma=2\alpha\\ \delta=2\alpha\\ \beta=\alpha\end{cases}$$

те су вектори $\left|w_1\right\rangle_1$, $\left|w_2\right\rangle_1$, $\left|w_3\right\rangle_1$ и $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle$ *линеарно зависни*, односно вектор $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle$ је стварно линеарна комбинација вектора $\left|w_1\right\rangle_1$, $\left|w_2\right\rangle_1$ и $\left|w_3\right\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$. Другачије речено, вектор $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle\in\mathbb{L}\left(\left|w_1\right\rangle_1,\left|w_2\right\rangle_1,\left|w_3\right\rangle_1\right)$.

Треба проверити и да ли је први вектор пресека $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle$ линеарна комбинација датих вектора $\left|w_1\right\rangle_2$, $\left|w_2\right\rangle_2$ и $\left|w_3\right\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$

$$\alpha\left|w_1\right\rangle_2+\beta\left|w_2\right\rangle_2+\gamma\left|w_3\right\rangle_2+\delta\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle=\left|0\right\rangle$$
$$\Leftrightarrow\quad \alpha(1,-1,-1,1)+\beta(2,-2,0,0)+\gamma(3,-1,1,-1)+\delta(-2,0,-1,1)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\quad (\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta,-\alpha-2\beta-\gamma,-\alpha+\gamma-\delta,\alpha-\gamma+\delta)=(0,0,0,0)$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки слева и здесна добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta=0\\-\alpha-2\beta-\gamma=0\\-\alpha+\gamma-\delta=0\\\alpha-\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta=0\\2\gamma-2\delta=0\\\alpha=\gamma-\delta\\\alpha-\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta=0\\\gamma=\delta\\\alpha=\gamma-\delta\\\alpha-\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta=0\\\gamma=\delta\\\alpha=\delta-\delta\\\alpha-\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta=0\\\gamma=\delta\\\alpha=0\\\alpha-\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta+3\gamma-2\delta=0\\\gamma=\delta\\\alpha=0\\-\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\beta+3\delta-2\delta=0\\\gamma=\delta\\\alpha=0\\-\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta+\delta=0\\\gamma=\delta\\\alpha=0\\-\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=-2\beta\\\gamma=\delta=-2\beta\\\alpha=0\\-\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\alpha+2\beta+3\gamma-2\delta=0\quad\Leftrightarrow\quad2\beta-6\beta+4\beta=0\quad\Leftrightarrow\quad(2-6+4)\beta=0\quad\Leftrightarrow\quad0\cdot\beta=0$$

што значи да су вектори $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$, $|w_3\rangle_2$ и $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависни*, односно вектор $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ је стварно линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$. Другачије речено, вектор $|v_1^{\text{pres}}\rangle\in\mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2,|w_2\rangle_2,|w_3\rangle_2\right)$.

* * *

Сад, да ли је други вектор пресека $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ линеарна комбинација задатих вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$?

$$\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1+\delta|v_2^{\text{pres}}\rangle=|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow\quad\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,1,-1,-1)+\gamma(1,-1,1,-1)+\delta(-1,1,-1,1)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\quad(\alpha+\beta+\gamma-\delta,\alpha+\beta-\gamma+\delta,\alpha-\beta+\gamma-\delta,\alpha-\beta-\gamma+\delta)=(0,0,0,0)$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се систем чија је детерминанта једнака нули

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\\alpha+\beta-\gamma+\delta=0\\\alpha-\beta+\gamma-\delta=0\\\alpha-\beta-\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\2\alpha+2\beta=0\\\alpha-\beta+\gamma-\delta=0\\2\alpha-2\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\\alpha+\beta=0\\\alpha-\beta+\gamma-\delta=0\\\alpha-\beta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\\alpha=-\beta\\\alpha-\beta+\gamma-\delta=0\\\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=\delta\\\beta=0\\\gamma-\delta=0\\\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=\delta\\\beta=0\\\delta-\delta=0\\\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=\delta\\\beta=0\\0\cdot\delta=0\\\alpha=0\end{cases}$$

из кога је јасно да је скуп вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависан*, односно вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ заиста јесте линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$. Другачије речено, вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle \in \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1, |w_2\rangle_1, |w_3\rangle_1\right)$.

Треба проверити и да ли је други вектор пресека $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ линеарна комбинација задатих вектора $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$

$$\alpha|w_1\rangle_2 + \beta|w_2\rangle_2 + \gamma|w_3\rangle_2 + \delta|v_2^{\text{pres}}\rangle = |0\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha(1,-1,-1,1) + \beta(2,-2,0,0) + \gamma(3,-1,1,-1) + \delta(-1,1,-1,1) = (0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a + 2\beta + 3\gamma - \delta, -\alpha - 2\beta - \gamma + \delta, -\alpha + \gamma - \delta, \alpha - \eta + \delta) = (0,0,0,0)$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се систем

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma - \delta = 0 \\ -\alpha - 2\beta - \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + \gamma - \delta = 0 \\ \alpha - \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma - \delta = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma - \delta = 0 \\ \alpha = \gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma - \delta = 0 \\ \alpha = \gamma - \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \delta = 0 \\ \alpha = -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\delta + 2\beta - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \delta = 0 \\ \alpha = -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta - 2\delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \delta = 0 \\ \alpha = -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \delta \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \delta = 0 \\ \alpha = -\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + 2\beta + 3\gamma - \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\delta + 2\delta - \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-2)\delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot \delta = 0$$

те су вектори $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$, $|w_3\rangle_2$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависни*, а вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ је стварно линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$. Другачије исказано, вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle \in \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2, |w_2\rangle_2, |w_3\rangle_2\right)$.

* * *

Да би вектори пресека $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ били базис пресека $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, морали би да буду линеарно независни. Стога се њихова линеарна комбинација изједначи са нултим вектором

$$\alpha_1|v_1^{\text{pres}}\rangle + \alpha_2|v_2^{\text{pres}}\rangle = |0\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(-2,0,-1,1) + \alpha_2(-1,1,-1,1) = (0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (-2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0,0,0,0)$$

одакле се добија систем једначина

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

што значи да вектори пресека $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle$ и $\left|v_2^{\text{pres}}\right\rangle$ стварно чине *базис* пресека $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, што се може записати и као $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle, \left|v_2^{\text{pres}}\right\rangle\right)$.

(в) Да ли матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

првог потпростора $\mathbb{W}_1$ чине базис?

Прва матрица се очигледно разликује од нулте матрице, те ће бити први базисни вектор

$$|w_1\rangle_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle .$$

Да би прве две матрице биле линеарно независне, коефицијенти у њиховој линеарној комбинацији морају бити понаособ једнаки нули

$$\alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 = |0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha+2\beta & 2\alpha+3\beta \\ \alpha+\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрице су једнаке ако су им матрични елементи једнаки, што даје систем једначина

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ 2\alpha+3\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta=-\alpha \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

чија су решења очигледна. Јасно је да су матрице $|w_1\rangle_1$ и $|w_2\rangle_1$ *линеарно независне*, те чине један дводимензионални базис.

Да ли су прве три матрице линеарно независна? Њихову линеарну комбинацију треба изједначити са нултом матрицом, што даје

$$\alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 + \gamma|w_3\rangle_1 = |0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha+2\beta+3\gamma & 2\alpha+3\beta+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha-2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma=0\\\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha-2\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma=0\\\beta=-\alpha-\gamma\\\alpha=2\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma=0\\\beta=-2\gamma-\gamma\\\alpha=2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma=0\\\beta=-3\gamma\\\alpha=2\gamma\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma=0\\\beta=-3\gamma\\\alpha=2\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\4\gamma-9\gamma+\gamma=0\\\beta=-3\gamma\\\alpha=2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\-4\gamma=0\\\beta=-3\gamma\\\alpha=2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\\gamma=0\\\beta=0\\\alpha=0\end{cases}$$

Сва три коефицијента линеарне комбинације једнака су нули те су матрице $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ *линеарно независне*, те представљају базис тродимензионалног ($\dim\mathbb{W}_1=3$) потпростора $\mathbb{W}_1$.

* * *

Сада се испитује да ли матрице

$$\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\-2&-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

потпростора $\mathbb{W}_2$ чине базис.

Прва матрица никако није нулта, те се узима за први базисни вектор

$$|w_1\rangle_2=\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=|0\rangle.$$

За проверу линеарне независности прве две матрице формира се њихова линеарна комбинација и изједначи са нултом матрицом

$$\alpha|w_1\rangle_2+\beta|w_2\rangle_2=|0\rangle\quad\Leftrightarrow\quad\alpha\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\-2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\beta&4\alpha\\\alpha-2\beta&3\alpha-6\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Из горњег израза следи следећи систем једначина

$$\begin{cases}\beta=0\\4\alpha=0\\\alpha-2\beta=0\\3\alpha-6\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\\alpha=0\\\alpha-2\beta=0\\3\alpha-6\beta=0\end{cases}$$

који се сам решава. Пошто су коефицијенти линеарне комбинације понаособ једнаки нули, то су матрице $|w_1\rangle_2$ и $|w_2\rangle_2$ *линеарно независне*, те чине дводимензионални базис.

Сада се проверава линеарна независност све три дате матрице потпростора $\mathbb{W}_2$, тако што се линеарна комбинација истих изједначава са нултим вектором

$$\alpha|w_1\rangle_2+\beta|w_2\rangle_2+\gamma|w_3\rangle_2=|0\rangle \;\Leftrightarrow\; \alpha\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\-2&-6\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1&0\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\beta+\gamma & 4\alpha\\ \alpha-2\beta+3\gamma & 3\alpha-6\beta+5\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Како су одговарајуће компоненте матрице слева и матрице здесна једнаке, биће

$$\begin{cases}\beta+\gamma=0\\4\alpha=0\\\alpha-2\beta+3\gamma=0\\3\alpha-6\beta+5\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\gamma\\\alpha=0\\2\beta+3\gamma=0\\-6\beta+5\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-\gamma\\\alpha=0\\-2\gamma+3\gamma=0\\6\beta-5\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\gamma\\\alpha=0\\\gamma=0\\6\beta-5\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\\alpha=0\\\gamma=0\\6\beta-5\gamma=0\end{cases}$$

Коефицијенти α, β и γ су сваки понаособ једнаки нули, матрице $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ јесу *линеарно независне*, те чине базис другог задатог такође *тродимензионалног* ($\dim\mathbb{W}_2=3$) потпростора $\mathbb{W}_2$.

* * *

Да би се могао добити базис *уније* потпростора $\mathbb{W}_1\cup\mathbb{W}_2$, базису првог потпростора додаје се прва матрица другог потпростора па се проверава да ли је тако добијени скуп матрица линеарно независан - линеарна комбинација матрица изједначи се са нултом

$$\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1+\delta|w_1\rangle_2=|0\rangle$$
$$\Leftrightarrow\; \alpha\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}3&1\\1&-2\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha+2\beta+3\gamma & 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta\\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & \alpha-2\gamma+3\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

а потом се реши систем једначина који одатле следи

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\\alpha-2\gamma+3\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\gamma-3\delta+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\2\gamma-3\delta+\beta+\gamma+\delta=0\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\gamma-3\delta+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\beta+3\gamma-2\delta=0\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta+5\gamma-3\delta=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\beta=-3\gamma+2\delta\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\gamma+4\delta+5\gamma-3\delta=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\beta=-3\gamma+2\delta\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\gamma+\delta=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\beta=-3\gamma+2\delta\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=\delta\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\beta=-3\gamma+2\delta\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=\delta\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\beta=-3\delta+2\delta\\\alpha=2\delta-3\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \delta \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = -\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \delta \\ -2\delta - 3\delta + \delta + 4\delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \delta \\ (5-5)\delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \delta \\ 0 \cdot \delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = -\delta \end{cases}$$

одакле је јасно да су матрице $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|w_1\rangle_2$ *линеарно зависне* тј. матрица $|w_1\rangle_2$ је линеарна комбинација прве три.

Сада се базису првог потпростора додаје друга матрица другог потпростора, и проверава линеарна независност те четири матрице

$$\alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 + \gamma|w_3\rangle_1 + \delta|w_2\rangle_2 = |0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta & 2\alpha + 3\beta + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma - 2\delta & \alpha - 2\gamma - 6\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Из горњег израза добија се систем једначина

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha - 2\gamma - 6\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma + 6\delta + \beta + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma + 4\delta = 0 \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -3\gamma - 4\delta \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\gamma + 6\delta - 6\gamma - 8\delta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -3\gamma - 4\delta \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -3\gamma - 4\delta \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\delta \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -3\gamma - 4\delta \\ \alpha = 2\gamma + 6\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\delta \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = 3\delta - 4\delta \\ \alpha = -2\delta + 6\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\delta \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = 4\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\delta \\ 8\delta - 3\delta - \delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = 4\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\delta \\ (8-4)\delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = 4\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\delta \\ 4\delta = 0 \\ \beta = -\delta \\ \alpha = 4\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Како су сви коефицијенти линеарне комбинације једнаки нули, матрице $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|w_2\rangle_2$ су линеарно независне, те чине базис четвородимензионалне, $\dim(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2) = 4$, уније потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$. Поменута унија не може имати број димензија већи од четири, будући да су задати потпростори подскупови простора $\mathbb{U} = \mathbb{R}^4$.

* * *

Пресек два тродимензионална потпростора $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ јесте *дводимензионалан* потпростор, а његов базис ће чинити *две матрице* који морају припадати и једном и другом потпростору, тј. оне који су линеарна комбинација матрица $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ из првог $\mathbb{W}_1$, али и линеарна комбинација матрица $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ из другог $\mathbb{W}_2$ потпростора.

Нека две жељене матрице имају облик

$$\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Оне морају бити линеарна комбинација матрица $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ из првог $\mathbb{W}_1$ потпростора

$$\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_1 = \alpha|w_1\rangle_1 + \beta|w_2\rangle_1 + \gamma|w_3\rangle_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+2\beta+3\gamma & 2\alpha+3\beta+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha-2\gamma \end{bmatrix}$$

Изједначавањем матричних компоненти слева и здесна бива

$$\begin{cases} a=\alpha+2\beta+3\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ c=\alpha+\beta+\gamma \\ d=\alpha-2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\alpha+2\beta+3\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ c=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d+2\gamma+2\beta+3\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ c=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ c=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ -2c=-2\alpha-2\beta-2\gamma \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ a-2c=d-2\alpha+3\gamma \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ a-2c=d-2\alpha+3\gamma \\ -2\alpha=-2d-4\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ a-2c=d-2d-4\gamma+3\gamma \\ -2\alpha=-2d-4\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ a-2c=-d-\gamma \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=d+2\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=d-2a+4c-2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d+2\beta+5\gamma \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=-2a+4c-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d+2\beta-5a+10c-5d \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=-2a+4c-d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-5a+10c-4d+2\beta \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=-2a+4c-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=10c-4d+2\beta \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=-2a+4c-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=5c-2d+\beta \\ b=2\alpha+3\beta+\gamma \\ \gamma=-a+2c-d \\ \alpha=-2a+4c-d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 3a - 5c + 2d \\ b = 2\alpha + 3\beta + \gamma \\ \gamma = -a + 2c - d \\ \alpha = -2a + 4c - d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = 3a - 5c + 2d \\ b = -4a + 8c - 2d + 9a - 15c + 6d - a + 2c - d \\ \gamma = -a + 2c - d \\ \alpha = -2a + 4c - d \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = 3a - 5c + 2d \\ b = (-4 + 9 - 1)a + (8 - 15 + 2)c + (6 - 2 - 1)d \\ \gamma = -a + 2c - d \\ \alpha = -2a + 4c - d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = 3a - 5c + 2d \\ b = 4a - 5c + 3d \\ \gamma = -a + 2c - d \\ \alpha = -2a + 4c - d \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left| v_{1,2}^{\text{pres}} \right\rangle_1 = \begin{bmatrix} a & 4a - 5c + 3d \\ c & d \end{bmatrix}$$

Потом се матрица $\left| v_{1,2}^{\text{pres}} \right\rangle$ пише као линеарна комбинација матрица $\left| w_1 \right\rangle_2$, $\left| w_2 \right\rangle_2$ и $\left| w_3 \right\rangle_2$ из другог $\mathbb{W}_2$ потпростора

$$\left| v_{1,2}^{\text{pres}} \right\rangle_2 = \delta \left| w_1 \right\rangle_2 + \varepsilon \left| w_2 \right\rangle_2 + \zeta \left| w_3 \right\rangle_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon + \zeta & 4\delta \\ \delta - 2\varepsilon + 3\zeta & 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{bmatrix}$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се

$$\left\{\begin{array}{l} a = \varepsilon + \zeta \\ b = 4\delta \\ c = \delta - 2\varepsilon + 3\zeta \ \ / \cdot (-3) \\ d = 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \varepsilon + \zeta \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ -3c = -3\delta + 6\varepsilon - 9\zeta \\ d = 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon = a - \zeta \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ d - 3c = -4\zeta \\ d = 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\varepsilon = 4a - 4\zeta \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ -4\zeta = d - 3c \\ d = 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\varepsilon = 4a + d - 3c \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ -4\zeta = d - 3c \\ d = 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \dfrac{4a + d - 3c}{4} \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ \zeta = \dfrac{3c - d}{4} \\ d = 3\delta - 6\varepsilon + 5\zeta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \dfrac{4a + d - 3c}{4} \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ \zeta = \dfrac{3c - d}{4} \\ d = 3\dfrac{b}{4} - 6\dfrac{4a + d - 3c}{4} + 5\dfrac{3c - d}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \dfrac{4a + d - 3c}{4} \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ \zeta = \dfrac{3c - d}{4} \\ 4d = 3b - 24a - 6d + 18c + 15c - 5d \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{4a+d-3c}{4} \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ \zeta = \dfrac{3c-d}{4} \\ 3b = 24a-(18+15)c+(4+6+5)d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{4a+d-3c}{4} \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ \zeta = \dfrac{3c-d}{4} \\ 3b = 24a-33c+15d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{4a+d-3c}{4} \\ \delta = \dfrac{b}{4} \\ \zeta = \dfrac{3c-d}{4} \\ b = 8a-11c+5d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_2 = \begin{bmatrix} a & 8a-11c+5d \\ c & d \end{bmatrix}$$

Како је реч о истој матрици представљеној у два базиса, следи

$$\left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_1 = \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle_2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 4a-5c+3d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 8a-11c+5d \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 4a-5c+3d = 8a-11c+5d$$

$$\Leftrightarrow \quad 2d = -4a+6c \quad \Leftrightarrow \quad d = -2a+3c$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle = \begin{bmatrix} a & 4a-5c-6a+9c \\ c & -2a+3c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|v_{1,2}^{\text{pres}}\right\rangle = \begin{bmatrix} a & -2a+4c \\ c & -2a+3c \end{bmatrix}$$

Да би се добиле два различите матрице, прво ће се претпоставити да је $a=1$ и $c=0$ што даје прву матрицу

$$\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

потом се претпостави да је $a=0$ и $c=1$, чиме се добија друга матрица

$$\left|v_2^{\text{pres}}\right\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

дводимензионалног $\dim\left(\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2\right) = 2$ *пресека* два тродимензионална потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

* * *

Сада треба проверити да ли је прва матрица пресека $\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle$ линеарна комбинација датих матрица $\left|w_1\right\rangle_1$, $\left|w_2\right\rangle_1$ и $\left|w_3\right\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$

$$\alpha\left|w_1\right\rangle_1 + \beta\left|w_2\right\rangle_1 + \gamma\left|w_3\right\rangle_1 + \delta\left|v_1^{\text{pres}}\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha+2\beta+3\gamma+\delta & 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha-2\gamma-2\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се систем чија је детерминанта једнака нули

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-2\gamma-2\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\\ \alpha=2\gamma+2\delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\\ -\beta-\gamma=2\gamma+2\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=-\beta-\gamma\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=3\gamma+2\delta-\gamma\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=2\gamma+2\delta\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2\gamma+2\delta-6\gamma-4\delta+3\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=2\gamma+2\delta\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-6+3)\gamma+(2-4+1)\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=2\gamma+2\delta\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\gamma-\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=2\gamma+2\delta\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\delta\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=2\gamma+2\delta\\ \beta=-3\gamma-2\delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-\delta\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=-2\delta+2\delta\\ \beta=3\delta-2\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\delta\\ 2\alpha+3\beta+\gamma-2\delta=0\\ \alpha=0\\ \beta=\delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-\delta\\ 3\delta-\delta-2\delta=0\\ \alpha=0\\ \beta=\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\delta\\ (3-3)\delta=0\\ \alpha=0\\ \beta=\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\delta\\ 0\cdot\delta=0\\ \alpha=0\\ \beta=\delta\end{cases}$$

те су матрице $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависне*, односно матрица $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ је стварно линеарна комбинација матрица $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$. Другачије речено, матрица $|v_1^{\text{pres}}\rangle \in \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1, |w_2\rangle_1, |w_3\rangle_1\right)$.

Треба проверити и да ли је први вектор пресека $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ линеарна комбинација датих вектора $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$

$$\alpha|w_1\rangle_2+\beta|w_2\rangle_2+\gamma|w_3\rangle_2+\delta|v_1^{\text{pres}}\rangle=|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\-2&-6\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1&0\\3&5\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}1&-2\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\beta+\gamma+\delta & 4\alpha-2\delta\\ \alpha-2\beta+3\gamma & 3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Изједначавањем компоненти уређених четворки с леве и десне стране добија се систем чија је детерминанта једнака нули

$$\begin{cases}\beta+\gamma+\delta=0\\4\alpha-2\delta=0\\\alpha-2\beta+3\gamma=0\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=-\beta-\gamma\\\delta=2\alpha\\\alpha-2\beta+3\gamma=0\ /\cdot(-2)\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\\delta=2\alpha\\-2\alpha+4\beta-6\gamma=0\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\\delta=2\alpha\\5\beta-5\gamma=0\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\\delta=2\alpha\\\beta=\gamma\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+2\gamma=0\\\delta=2\alpha\\\beta=\gamma\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\\delta=2\alpha=-2\gamma\\\beta=\gamma\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\\delta=2\alpha=-2\gamma\\\beta=\gamma\\3\alpha-6\beta+5\gamma-2\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\\delta=2\alpha=-2\gamma\\\beta=\gamma\\-3\gamma-6\gamma+5\gamma+4\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\\delta=2\alpha=-2\gamma\\\beta=\gamma\\(-9+9)\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma\\\delta=2\alpha=-2\gamma\\\beta=\gamma\\0\cdot\gamma=0\end{cases}$$

те су матрице $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$, $|w_3\rangle_2$ и $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависне*, односно матрица $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ је стварно линеарна комбинација матрица $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$. Другачије речено, вектор $|v_1^{\text{pres}}\rangle\in\mathbb{L}\big(|w_1\rangle_2,|w_2\rangle_2,|w_3\rangle_2\big)$.

* * *

Сад, да ли је друга матрица пресека $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ линеарна комбинација датих матрица $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$?

$$\alpha|w_1\rangle_1+\beta|w_2\rangle_1+\gamma|w_3\rangle_1+\delta|v_2^{\text{pres}}\rangle=|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}3&1\\1&-2\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}\alpha+2\beta+3\gamma&2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta\\\alpha+\beta+\gamma+\delta&\alpha-2\gamma+3\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Изједначавањем матричних елемената леве и десне матрице добија се систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\\alpha-2\gamma+3\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\gamma-3\delta+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\\alpha=2\gamma-3\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta+5\gamma-3\delta=0 \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=0\ /\cdot 2 \\ \alpha=2\gamma-3\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=-5\gamma+3\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ 2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=0 \\ \alpha=2\gamma-3\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=-5\gamma+3\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ 4\gamma-6\delta-5\gamma+3\delta+2\gamma+2\delta=0 \\ \alpha=2\gamma-3\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta=-5\gamma+3\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ (4-5+2)\gamma+(-6+3+2)\delta=0 \\ \alpha=2\gamma-3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta=-5\gamma+3\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ \gamma-\delta=0 \\ \alpha=2\gamma-3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta=-5\gamma+3\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=2\gamma-3\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\beta=-5\delta+3\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=2\delta-3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta=-2\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=-\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\delta \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+4\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=-\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=-\delta \\ -2\delta-3\delta+\delta+4\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=-\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\delta \\ (-2-3+1+4)\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=-\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\delta \\ 0\cdot\delta=0 \\ \gamma=\delta \\ \alpha=-\delta \end{cases}$$

из кога је јасно да је скуп матрица $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$, $|w_3\rangle_1$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависан*, тј. вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ заиста јесте линеарна комбинација матрица $|w_1\rangle_1$, $|w_2\rangle_1$ и $|w_3\rangle_1$ првог потпростора $\mathbb{W}_1$. Илити, вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle \in \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_1, |w_2\rangle_1, |w_3\rangle_1\right)$.

Још треба проверити да ли је друга матрица пресека $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ линеарна комбинација задатих матрица $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$

$$\alpha|w_1\rangle_2+\beta|w_2\rangle_2+\gamma|w_3\rangle_2+\delta|v_2^{\text{pres}}\rangle=|0\rangle$$

$$\Leftrightarrow \alpha\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta+\gamma & 4\alpha+4\delta \\ \alpha-2\beta+3\gamma+\delta & 3\alpha-6\beta+5\gamma+3\delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Изједначавањем матричних компоненти матрице слева и матрице здесна добија се систем

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ 4\alpha+4\delta=0 \\ \alpha-2\beta+3\gamma+\delta=0 \\ 3\alpha-6\beta+5\gamma+3\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\gamma \\ \alpha=-\delta \\ \alpha-2\beta+3\gamma+\delta=0 \\ 3\alpha-6\beta+5\gamma+3\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-\gamma \\ \alpha=-\delta \\ \alpha-2\beta+3\gamma+\delta=0 \\ -3\delta+6\gamma+5\gamma+3\delta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\delta \\ \alpha - 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\delta \\ -\delta - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\delta \\ 0\cdot\delta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

одакле је јасно да су матрице $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$, $|w_3\rangle_2$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ *линеарно зависне*, а вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ је линеарна комбинација вектора $|w_1\rangle_2$, $|w_2\rangle_2$ и $|w_3\rangle_2$ другог потпростора $\mathbb{W}_2$. Другачије речено, вектор $|v_2^{\text{pres}}\rangle \in \mathbb{L}\left(|w_1\rangle_2, |w_2\rangle_2, |w_3\rangle_2\right)$.

* * *

Да би матрице $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ биле базис пресека $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, морале би да буду линеарно независне. Стога се њихова линеарна комбинација изједначи са нултом матрицом

$$\alpha_1|v_1^{\text{pres}}\rangle + \alpha_2|v_2^{\text{pres}}\rangle = |0\rangle \;\Rightarrow\; \alpha_1\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & -2\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ \alpha_2 & -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

одакле се добија систем једначина

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

који је самим исписивањем већ решен; како су коефицијенти у линеарној комбинацији матрица једнаки нули, вектори $|v_1^{\text{pres}}\rangle$ и $|v_2^{\text{pres}}\rangle$ су *линеарно независни*, те стварно чине *базис* пресека $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, што се може записати и као $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}\left(|v_1^{\text{pres}}\rangle, |v_2^{\text{pres}}\rangle\right)$.

(4.6) Нека су $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ потпростори векторског простора $\mathbb{V}$. Показати да сваки вектор из простора $\mathbb{V}$ може да се једнозначно напише као збир једног вектора из потпростора $\mathbb{W}_1$ и једног вектора из потпростора $\mathbb{W}_2$.

Нека поменути вектор из простора $\mathbb{V}$ није једнозначно одређен; он се тада може написати на два начина

$$\begin{aligned} |v\rangle &= |w\rangle_1 + |w\rangle_2 \\ |v\rangle &= |\bar{w}\rangle_1 + |\bar{w}\rangle_2 \end{aligned}$$

Будући да се ради о истом вектору $|v\rangle = |v\rangle$, десне стране горњих израза могу се изједначити

$$|w\rangle_1 + |w\rangle_2 = |\bar{w}\rangle_1 + |\bar{w}\rangle_2 ,$$

илити

$$|w\rangle_1 - |\bar{w}\rangle_1 = |w\rangle_2 - |\bar{w}\rangle_2 .$$

Лева страна горњег израза елемент је првог потпростора, десна другог

$$|w\rangle_1 - |\bar{w}\rangle_1 \in \mathbb{W}_1 , \quad |w\rangle_2 - |\bar{w}\rangle_2 \in \mathbb{W}_2 ,$$

одакле следи да је

$$|w\rangle_1 - |\bar{w}\rangle_1 = |w\rangle_2 - |\bar{w}\rangle_2 \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 .$$

Према дефиницији директног збира потпростора биће

$$\mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2), \quad \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{|0\rangle\},$$

те је

$$|w\rangle_1 - |\bar{w}\rangle_1 = |w\rangle_2 - |\bar{w}\rangle_2 \in \{|0\rangle\},$$

одакле је јасно да је

$$\begin{aligned} |w\rangle_1 - |\bar{w}\rangle_1 &= |0\rangle \\ |w\rangle_2 - |\bar{w}\rangle_2 &= |0\rangle \end{aligned},$$

односно

$$\begin{aligned} |w\rangle_1 &= |\bar{w}\rangle_1 \\ |w\rangle_2 &= |\bar{w}\rangle_2 \end{aligned},$$

што значи да је вектор $|v\rangle$ једнозначно одређен.

(4.7) Показати да је у векторском простору $\mathbb{F}^{nn}$

(а) скуп $\mathbb{S}$ симетричних матрица $a_{ij} = a_{ji}$ *потпростор*;

(б) скуп $\mathbb{A}$ антисиметричних матрица $a_{ij} = -a_{ji}$ *потпростор*;

(в) показати да важи израз: $\mathbb{F}^{nn} = \mathbb{S} \dot{+} \mathbb{A}$.

(а) *Симетричне* матрице су матрице за које важи особина $a_{ij} = a_{ji}$ вандијагоналних матричних елемената, нпр. матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

или нулта матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нека су дате две симетричне матрице

$$\mathscr{A} = \left[a_{ij} \right] \in \mathbb{S}, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$
$$\mathscr{B} = \left[b_{ij} \right] \in \mathbb{S}, \quad (b_{ij} = b_{ji})$$

Како $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи израз

$$\alpha \mathscr{A} + \beta \mathscr{B} = \alpha \left[a_{ij} \right] + \beta \left[b_{ij} \right] = \alpha \left[a_{ji} \right] + \beta \left[b_{ji} \right] = \alpha \mathscr{A} + \beta \mathscr{B} \in \mathbb{S},$$

што значи да је $\mathbb{S}$ потпростор од $\mathbb{F}^{nn}$.

(б) *Антисиметричне* матрице су матрице за које важи особина $a_{ij} = -a_{ji}$ вандијагоналних матричних елемената, нпр. матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

или нулта матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нека су дате две антисиметричне матрице

$$\mathscr{C} = \left[c_{ij} \right] \in \mathbb{A}, \quad (c_{ij} = -c_{ji})$$
$$\mathscr{D} = \left[d_{ij} \right] \in \mathbb{A}, \quad (d_{ij} = -d_{ji})$$

Пошто $\forall \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ важи израз

$$\gamma\mathscr{C} + \delta\mathscr{D} = \gamma\left[c_{ij} \right] + \delta\left[d_{ij} \right] = \gamma\left[-c_{ji} \right] + \delta\left[-d_{ji} \right] = -\gamma\mathscr{C} - \delta\mathscr{D} = -(\gamma\mathscr{C} + \delta\mathscr{D}) \in \mathbb{A},$$

то значи да је $\mathbb{A}$ потпростор од $\mathbb{F}^{nn}$.

(в) Услови да сума два потпростора буде *директна сума* су

$$\mathbb{S} + \mathbb{A} = \mathbb{F}^{nn} \quad \text{и} \quad \mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \left\{ |0\rangle \right\}.$$

Први услов: Нека је $\mathscr{E}$ произвољна матрица из простора $\mathbb{F}^{nn}$. Може се писати да је

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}}{2} + \frac{\mathscr{E}}{2} = \frac{\mathscr{E}}{2} + \frac{\mathscr{E}}{2} + \frac{\mathscr{E}^{\mathrm{T}}}{2} - \frac{\mathscr{E}^{\mathrm{T}}}{2} = \frac{\mathscr{E}}{2} + \frac{\mathscr{E}^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{\mathscr{E}}{2} - \frac{\mathscr{E}^{\mathrm{T}}}{2} = \frac{1}{2}(\mathscr{E} + \mathscr{E}^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(\mathscr{E} - \mathscr{E}^{\mathrm{T}}).$$

Први члан у последњем изразу је симетрична матрица

$$\frac{1}{2}(\mathscr{E} + \mathscr{E}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\left(\left[e_{ij} \right] + \left[e_{ji} \right] \right) = \frac{1}{2}\left(\left[e_{ji} \right] + \left[e_{ij} \right] \right) = \frac{1}{2}(\mathscr{E}^{\mathrm{T}} + \mathscr{E}) \in \mathbb{S}$$

док је други члан антисиметрична матрица

$$\frac{1}{2}(\mathscr{E} - \mathscr{E}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\left(\left[e_{ij} \right] - \left[e_{ji} \right] \right) = -\frac{1}{2}\left(\left[e_{ji} \right] - \left[e_{ij} \right] \right) = -\frac{1}{2}(\mathscr{E}^{\mathrm{T}} - \mathscr{E}) \in \mathbb{A}$$

чиме је показано да је $\mathbb{F}^{nn} = \mathbb{S} \dot{+} \mathbb{A}$.

Други услов: Сад, нека је дата произвољна матрица $\mathscr{M} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{A}$ што значи да је она исто-временo и симетрична и антисиметрична матрица

$$\mathscr{M} \in \mathbb{S}: \ \mathscr{M} = \mathscr{M}^{\mathrm{T}} \ \Rightarrow \mathscr{M}^{\mathrm{T}} = \mathscr{M}$$
$$\mathscr{M} \in \mathbb{A}: \ \mathscr{M} = -\mathscr{M}^{\mathrm{T}} \ \Rightarrow \mathscr{M}^{\mathrm{T}} = -\mathscr{M}$$

одакле је јасно да је $\mathscr{M} = -\mathscr{M}$, што је могуће само за нулту матрицу

$$\mathscr{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

која и јесте једини заједнички елемент скупова симетричних и антисиметричних матрица

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \left\{ |0\rangle \right\}.$$

Како су оба наведена услова испуњена, то је заиста $\mathbb{S} \dot{+} \mathbb{A} = \mathbb{F}^{nn}$.

(4.8) Показати да је векторски простор $\mathbb{V}$ функција дефинисаних на сегменту $[-a,a]$ једнак директној суми потпростора $\mathbb{V}^+$ парних функција и потпростора $\mathbb{V}^-$ непарних функција на датом сегменту: $\mathbb{V}=\mathbb{V}^+\dot{+}\mathbb{V}^-$.

Први услов: Нека је функција векторског простора $\mathbb{V}$. Она се може писати као

$$f(x)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(x)}{2}+0=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(x)}{2}+\frac{f(-x)}{2}-\frac{f(-x)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

Како је први члан последњег израза парна функција

$$p(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=p(-x)\in\mathbb{V}^+$$

док је други члан последњег израза непарна функција

$$n(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-n(-x)\in\mathbb{V}^-$$

то је $\mathbb{V}=\mathbb{V}^+ + \mathbb{V}^-$.

Други услов: Нека је функција $g(x)\in\mathbb{V}^+\bigcap\mathbb{V}^-$, односно нека је она истовремено и парна и непарна функција

$$g(x)\in\mathbb{V}^+:\quad g(-x)=g(x)$$
$$g(x)\in\mathbb{V}^-:\quad g(-x)=-g(x)$$

одакле следи да је $g(x)=-g(x)$, а то је могуће само ако је реч о нултој функцији $g(x)=0$, те је $\mathbb{V}^+\bigcap\mathbb{V}^-=\{|0\rangle\}$.

Како су оба услова испуњена, то је $\mathbb{V}=\mathbb{V}^+\dot{+}\mathbb{V}^-$.

(4.9) Нека је $\mathbb{W}_1$ потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ образован скупом вектора $\{|w_i\rangle_1\}$, док је $\mathbb{W}_2$ потпростор истог векторског простора $\mathbb{R}^4$ образован скупом вектора $\{|w_i\rangle_2\}$. У којем је од следећих случајева $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$

(а) $\begin{matrix} |v_1\rangle_1 = (1,1,0,0) \\ |v_2\rangle_1 = (1,0,1,0) \end{matrix}, \begin{matrix} |v_1\rangle_2 = (0,1,0,1) \\ |v_2\rangle_2 = (0,0,1,1) \end{matrix}$; (б) $\begin{matrix} |v_1\rangle_1 = (-1,1,1,0) \\ |v_2\rangle_1 = (1,0,0,0) \end{matrix}, \begin{matrix} |v_1\rangle_2 = (0,1,-1,1) \\ |v_2\rangle_2 = (0,0,0,1) \end{matrix}$;

(в) $\begin{matrix} |v_1\rangle_1 = (2,3,11,5) \\ |v_2\rangle_1 = (1,1,5,2) \\ |v_3\rangle_1 = (0,1,1,1) \end{matrix}, \begin{matrix} |v_1\rangle_2 = (2,1,3,2) \\ |v_2\rangle_2 = (1,1,3,4) \\ |v_3\rangle_2 = (5,2,6,2) \end{matrix}$?

У горњим примерима, где год је то могуће, разложити вектор $|v\rangle = (2,0,0,3)$ на компоненте из $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

(а) Да би четвородимензионални простор $\mathbb{R}^4$ био једнак директној суми потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$, неопходно је да унија поменутих потпростора такође буде четвородимензионална. То ће бити испуњено само ако у поставци наведена четири вектора - два из првог потпростора: $|v_1\rangle_1 = (1,1,0,0)$, $|v_2\rangle_1 = (1,0,1,0)$ и два из другог: $|v_1\rangle_2 = (0,1,0,1)$, $|v_2\rangle_2 = (0,0,1,1)$ - чине базис, односно ако су *линеарно независни*. Да би се то проверило, потребно је да сви коефицијенти њихове линеарне комбинације (изједначене с нултим вектором) буду сваки понаособ једнаки нули

$$\begin{aligned} & \alpha|v_1\rangle_1 + \beta|v_2\rangle_1 + \gamma|v_1\rangle_2 + \delta|v_2\rangle_2 = |0\rangle \\ \Rightarrow\ & \alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(0,1,0,1) + \delta(0,0,1,1) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\delta, \gamma+\delta) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки слева и здесна добија се следећи систем

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta=-\delta \\ \gamma=-\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\gamma \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta=\gamma \\ \gamma=-\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\gamma \\ -\gamma+\gamma=0 \\ \beta=\gamma \\ \gamma=-\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\gamma \\ 0\cdot\gamma=0 \\ \beta=\gamma \\ \delta=-\gamma \end{cases}$$

Како коефицијенти α, β и δ линеарне комбинације зависе од коефицијента γ, а он може бити произвољан реалан број, то је дати скуп од 4 вектора *линеарно зависан*, те би унија потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ нужно имала мањи број димензија од $\mathbb{R}^4$. Стога је $\mathbb{R}^4 \neq \mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$.

(б) Као и у претходном случају, четвородимензионални простор $\mathbb{R}^4$ биће једнак директној суми потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ ако је њихова унија такође четвородимензионална, тј. само ако у поставци дата четири вектора - два из првог потпростора: $|v_1\rangle_1 = (-1,1,1,0)$, $|v_2\rangle_1 = (1,0,0,0)$ и два из другог: $|v_1\rangle_2 = (0,1,-1,1)$, $|v_2\rangle_2 = (0,0,0,1)$ - чине базис, што значи да морају бити *линеарно независни*. Опет се њихова линеарна комбинација изједначи с нултим вектором

$$\begin{aligned} &\alpha|v_1\rangle_1 + \beta|v_2\rangle_1 + \gamma|v_1\rangle_2 + \delta|v_2\rangle_2 = |0\rangle \\ \Rightarrow\ &\alpha(-1,1,1,0) + \beta(1,0,0,0) + \gamma(0,1,-1,1) + \delta(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ &(-\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \alpha-\gamma, \gamma+\delta) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

одакле се добија систем једначина

$$\begin{cases} -\alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=0 \\ \gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\alpha \\ \alpha+\gamma=0 \\ \alpha=\gamma \\ \delta=-\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ \alpha+\gamma=0 \\ \alpha=\gamma \\ \delta=-\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ \gamma+\gamma=0 \\ \alpha=\gamma \\ \delta=-\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\gamma \\ 2\gamma=0 \\ \alpha=\gamma \\ \delta=-\gamma \end{cases}$$

Како коефицијенти α, β и δ линеарне комбинације зависе од коефицијента γ, а он мора бити нула, то је дати скуп од 4 вектора *линеарно независан*, те је унија потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ дефинитивно четвородимензионална, баш као и простор $\mathbb{R}^4$, а и пресек потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ очигледно је празан скуп. Стога је $\mathbb{R}^4 = \mathbb{W}_1 \dot{+} \mathbb{W}_2$.

Преостало је да се задати вектор $|v\rangle = (2,0,0,3)_{\{|e\rangle\}}$ напише као линеарна комбинација дата четири вектора

$$\begin{aligned} &|v\rangle = \alpha|v_1\rangle_1 + \beta|v_2\rangle_1 + \gamma|v_1\rangle_2 + \delta|v_2\rangle_2 \\ \Rightarrow\ &(2,0,0,3) = \alpha(-1,1,1,0) + \beta(1,0,0,0) + \gamma(0,1,-1,1) + \delta(0,0,0,1) \\ \Leftrightarrow\ &(2,0,0,3) = (-\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \alpha-\gamma, \gamma+\delta) \end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређене четворке слева и уређене четворке здесна, следи систем

$$\begin{cases} -\alpha+\beta=2 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=0 \\ \gamma+\delta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=2 \\ 2\alpha=0 \\ \alpha-\gamma=0 \\ \gamma+\delta=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=2 \\ \alpha=0 \\ \alpha-\gamma=0 \\ \gamma+\delta=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ \alpha=0 \\ \gamma=0 \\ \gamma+\delta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ \alpha=0 \\ \gamma=0 \\ \delta=3 \end{cases}$$

те је задати вектор у датом базису једнак

$$|v\rangle = 0|v_1\rangle_1 + 2|v_2\rangle_1 + 0|v_1\rangle_2 + 3|v_2\rangle_2 = 2|v_2\rangle_1 + 3|v_2\rangle_2 = (0,2,0,3)_{\{|v\rangle\}}.$$

(в) Као и раније, четвородимензионални простор $\mathbb{R}^4$ једнак је директној суми потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ ако је њихова унија такође четвородимензионална, с тим што су сада у поставци задата три вектора из првог потпростора: $|v_1\rangle_1 = (2,3,11,5)$, $|v_2\rangle_1 = (1,1,5,2)$ и $|v_3\rangle_1 = (0,1,1,1)$, и три из другог: $|v_1\rangle_2 = (2,1,3,2)$, $|v_2\rangle_2 = (1,1,3,4)$ и $|v_3\rangle_2 = (5,2,6,2)$ - чине базис. Стога се мора проверавати линеарна независност свих задатих вектора.

Први вектор првог потпростора различит је од нултог, те може бити елемент траженог базиса

$$|v_1\rangle_1 = (2,3,11,5) \neq |\,0\rangle .$$

Да ли су прва два вектора првог базиса линеарно независна? Њихова линеарна комбинација изједначи се с нултим вектором

$$\begin{aligned} & \alpha|v_1\rangle_1 + \beta|v_2\rangle_1 = |\,0\rangle \\ \Rightarrow\ & \alpha(2,3,11,5) + \beta(1,1,5,2) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 11\alpha+5\beta, 5\alpha+2\beta) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

одакле се добија систем једначина

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ 3\alpha+\beta=0 \\ 11\alpha+5\beta=0 \\ 5\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ 3\alpha+\beta=0 \\ 11\alpha+5\beta=0 \\ 5\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ 3\alpha-2\alpha=0 \\ 11\alpha+5\beta=0 \\ 5\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ \alpha=0 \\ 11\alpha+5\beta=0 \\ 5\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=0 \\ 11\alpha+5\beta=0 \\ 5\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

Како су оба коефицијента α и β линеарне комбинације једнаки нули, то су прва два вектора првог потпростора *линеарно независни*, те ће они формирати прва два елемента базиса уније потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$.

Преостало је да се провери да ли су сва три дата вектора првог потпростора линеарно независни међусобно. Формира се њихова линеарна комбинација

$$\begin{aligned} & \alpha|v_1\rangle_1 + \beta|v_2\rangle_1 + \gamma|v_3\rangle_1 = |\,0\rangle \\ \Rightarrow\ & \alpha(2,3,11,5) + \beta(1,1,5,2) + \gamma(0,1,1,1) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta+\gamma, 11\alpha+5\beta+\gamma, 5\alpha+2\beta+\gamma) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

одакле следи систем једначина

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ 3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 11\alpha+5\beta+\gamma=0 \\ 5\alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ 3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 11\alpha+5\beta+\gamma=0 \\ 5\alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ 3\alpha-2\alpha+\gamma=0 \\ 11\alpha+5\beta+\gamma=0 \\ 5\alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ \alpha+\gamma=0 \\ 11\alpha+5\beta+\gamma=0 \\ 5\alpha+2\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ 11\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ 11\alpha - 10\alpha - \alpha = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ (11-11)\alpha = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ 0 \cdot \alpha = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

одакле се види да коефицијенти линеарне комбинације β и γ зависе од коефицијента α који може бити било који реалан број, што значи да су прва три вектора првог потпростора *линарно зависни*. Зато трећи вектор првог потпростора (будући линеарна комбинација прва два) отпада.

Да би се могао даље формирати тражени базис, линеарно независним векторима из првог потпростора $|v_1\rangle_1 = (2,3,11,5)$, $|v_2\rangle_1 = (1,1,5,2)$ додаје се први вектор из другог потпростора, значи $|v_1\rangle_2 = (2,1,3,2)$, па се провери њихова линеарна независност. Прво се њихова линеарна комбинација изједначи с нултим вектором

$$\begin{aligned} & \alpha|v_1\rangle_1 + \beta|v_2\rangle_1 + \gamma|v_1\rangle_2 = |0\rangle \\ \Rightarrow\ & \alpha(2,3,11,5) + \beta(1,1,5,2) + \gamma(2,1,3,2) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (2\alpha + \beta + 2\gamma, 3\alpha + \beta + \gamma, 11\alpha + 5\beta + 3\gamma, 5\alpha + 2\beta + 2\gamma) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

одакле следи систем

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2\gamma \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2\gamma \\ 3\alpha - 2\alpha - 2\gamma + \gamma = 0 \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2\gamma \\ \alpha - \gamma = 0 \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2\gamma \\ \alpha = \gamma \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\gamma - 2\gamma \\ \alpha = \gamma \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \\ 11\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \\ 11\gamma + 3\gamma = 0 \\ 5\gamma + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \\ 14\gamma = 0 \\ 7\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Како су сви коефицијенти линеарне комбинације понаособ једнаки нули, то је овако одабрани скуп вектора линеарно независан, али је проблем што вектора има само три.

Зато скупу линеарно независних вектора $|v_1\rangle_1$, $|v_2\rangle_1$ и $|v_1\rangle_2$ треба додати још један вектор другог потпростора, рецимо $|v_2\rangle_2 = (1,1,3,4)$, и проверити линеарну независност таквог скупа од 4 вектора

$$\alpha|v_1\rangle_1+\beta|v_2\rangle_1+\gamma|v_1\rangle_2+\delta|v_2\rangle_2=|0\rangle$$
$$\Rightarrow\ \alpha(2,3,11,5)+\beta(1,1,5,2)+\gamma(2,1,3,2)+\delta(1,1,3,4)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\ (2\alpha+\beta+2\gamma+\delta,3\alpha+\beta+\gamma+\delta,11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta,5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta)=(0,0,0,0)$$

одакле се добија следећи скуп једначина

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=0\\3\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha-2\gamma-\delta\\3\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha-2\gamma-\delta\\3\alpha-2\alpha-2\gamma-\delta+\gamma+\delta=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha-2\gamma-\delta\\\alpha-\gamma=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha-2\gamma-\delta\\\alpha=\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-2\gamma-2\gamma-\delta\\\alpha=\gamma\\11\gamma+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-4\gamma-\delta\\\alpha=\gamma\\5\beta+14\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-4\gamma-\delta\\\alpha=\gamma\\-20\gamma-5\delta+14\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-4\gamma-\delta\\\alpha=\gamma\\-6\gamma-2\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-4\gamma-\delta\\\alpha=\gamma\\\delta=-3\gamma\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-4\gamma+3\gamma=\gamma\\\alpha=\gamma\\\delta=-3\gamma\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\gamma\\\alpha=\gamma\\\delta=-3\gamma\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=\gamma\\\alpha=\gamma\\\delta=-3\gamma\\5\gamma+2\gamma+2\gamma-12\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\gamma\\\alpha=\gamma\\\delta=-3\gamma\\(9-12)\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\gamma\\\alpha=\gamma\\\delta=-3\gamma\\-3\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\\alpha=0\\\delta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

Како су сви коефицијенти линеарне комбинације понаособ једнаки нули, то је овако одабрани скуп вектора линеарно независан, а како их коначно има четири, то они чине базис уније два потпростора. Наравно, пресек датих потпростора је у овом случају празан скуп (потпростори немају заједничких вектора), те је стога $\mathbb{R}^4=\mathbb{W}_1\dot{+}\mathbb{W}_2$.

Преостало је да се задати вектор $|v\rangle=(2,0,0,3)_{\{|e\rangle\}}$ напише као линеарна комбинација дата четири вектора

$$|v\rangle=\alpha|v_1\rangle_1+\beta|v_2\rangle_1+\gamma|v_1\rangle_2+\delta|v_2\rangle_2$$
$$\Rightarrow\ (2,0,0,3)=\alpha(2,3,11,5)+\beta(1,1,5,2)+\gamma(2,1,3,2)+\delta(1,1,3,4)$$
$$\Leftrightarrow\ (2,0,0,3)=(2\alpha+\beta+2\gamma+\delta,3\alpha+\beta+\gamma+\delta,11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta,5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta)$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређене четворке слева и уређене четворке здесна, следи систем, записив и у матричном облику

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=2\\3\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2-2\alpha-2\gamma-\delta\\3\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=2-2\alpha-2\gamma-\delta\\3\alpha+2-2\alpha-2\gamma-\cancel{\delta}+\gamma+\cancel{\delta}=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2-2\alpha-2\gamma-\delta\\\alpha+2-\gamma=0\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2-2\alpha-2\gamma-\delta\\\alpha=-2+\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=2+4-2\gamma-2\gamma-\delta\\\alpha=-2+\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=6-4\gamma-\delta\\\alpha=-2+\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\5\alpha+2\beta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=6-4\gamma-\delta\\\alpha=-2+\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\-10+5\gamma+12-8\gamma-2\delta+2\gamma+4\delta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=6-4\gamma-\delta\\\alpha=-2+\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\2-\gamma+2\delta=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=6-4\gamma-\delta\\\alpha=-2+\gamma\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=6+4-8\delta-\delta\\\alpha=-2-1+2\delta\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=10-9\delta\\\alpha=-3+2\delta\\11\alpha+5\beta+3\gamma+3\delta=0\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=10-9\delta\\\alpha=-3+2\delta\\-33+22\delta+50-45\delta-3+6\delta+3\delta=0\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=10-9\delta\\\alpha=-3+2\delta\\14-14\delta=0\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=10-9\delta\\\alpha=-3+2\delta\\14=14\delta\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=10-9\delta\\\alpha=-3+2\delta\\\delta=1\\\gamma=-1+2\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta=10-9\\\alpha=-3+2\\\delta=1\\\gamma=-1+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=1\\\alpha=-1\\\delta=1\\\gamma=1\end{cases}$$

Како су одређени тражени коефицијенти линеарне комбинације, то се задати вектор у базису уније два потпростора може записати као

$$|v\rangle=(-1)|v_1\rangle_1+1|v_2\rangle_1+1|v_1\rangle_2+1|v_2\rangle_2$$

односно

$$|v\rangle=(2,0,0,3)_{\{|e\rangle\}}=(-1,1,1,1)_{\{|v\rangle\}}.$$

Овај се вектор такође може записати као збир два вектора, од којих први припада првом потпростору, а други другом потпростору

$$\begin{aligned}|v\rangle&=(-1,1,1,1)=(-1)|v_1\rangle_1+1|v_2\rangle_1+1|v_1\rangle_2+1|v_2\rangle_2\\&=(-1)|v_1\rangle_1+1|v_2\rangle_1+1|v_1\rangle_2+1|v_2\rangle_2\\&=(-1)(2,3,11,5)_1+(1,1,5,2)_1+(2,1,3,2)_2+(1,1,3,4)_2\\&=(-2+1,-3+1,-11+5,-5+2)_1+(2+1,1+1,3+3,2+4)_2\\&=(-1,-2,-6,-3)_1+(3,2,6,6)_2\end{aligned}$$

(4.10) Нека је $\mathbb{U}$ коначно-димензионални унитарни простор, а $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ његови потпростори. Показати да важи

(а) $\left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbb{W}_1$;

(б) $\mathbb{U}^{\perp} = \{|0\rangle\}$, $\{|0\rangle\}^{\perp} = \mathbb{U}$;

(в) $\mathbb{W}_1^{\perp} \cap \mathbb{W}_2^{\perp} = \left(\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2\right)^{\perp}$.

(а) Нека је вектор $|v\rangle$ из потпростора $\mathbb{W}_1$, а вектор $|v\rangle^{\perp}$ из његовог ортокомплемента $\mathbb{W}_1^{\perp}$. Како је по дефиницији ортокомплемент скуп свих вектора који су ортогонални на све векторе скупа $\mathbb{W}_1$, мора да важи

$$\langle v | v\rangle^{\perp} = 0 .$$

По сличном резоновању, како је ортокомплемент $\left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp}$ ортокомплемента $\mathbb{W}_1^{\perp}$ скуп свих вектора који су ортогонални на све векторе ортокомплемента, биће

$$\langle v | v\rangle^{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\begin{cases} |v\rangle^{\perp} \in \mathbb{W}_1^{\perp} \\ |v\rangle \in \left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp} \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{W}_1 \subset \left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp} .$$

Сад мало резоновања у супротном смеру; нека је вектор $|v\rangle^{\perp}$ из ортокомплемента $\left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp}$ ортокомплемента, а вектор $|v\rangle^{\perp}$ из ортокомплемента $\mathbb{W}_1^{\perp}$, тада мора бити

$$\langle v | v\rangle^{\perp} = 0 .$$

Како је на почетку речено да је ортокомплемент скуп свих вектора који су ортогонални на све векторе скупа $\mathbb{W}_1$, мора да важи следеће

$$\langle v | v\rangle^{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\begin{cases} |v\rangle^{\perp} \in \mathbb{W}_1^{\perp} \\ |v\rangle \in \mathbb{W}_1 \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp} \subset \mathbb{W}_1 .$$

Пошто је ортокомплемент ортокомплемента $\left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp}$ подскуп потпростора $\mathbb{W}_1$, а и потпростор $\mathbb{W}_1$ је подскуп ортокомплемента ортокомплемента $\left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp}$, следи да је

$$\mathbb{W}_1 = \left(\mathbb{W}_1^{\perp}\right)^{\perp} .$$

(б) Нулти вектор $|0\rangle$ једини је вектор ортогоналан на све векторе унитарног простора $\mathbb{U}$, те је стога ортокомплемент унитарног простора дат као

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{|0\rangle\} .$$

Ортокомплемент ортокомплемента $\mathbb{U}^{\perp}$ јесу сви вектори унитарног простора $\mathbb{U}$, будући да су сви они ортогонални на нулти вектор

$$\{|0\rangle\}^{\perp}=\mathbb{U}.$$

(в) Нека је вектор $|v\rangle$ елемент ортокомплемента суме потпростора $(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)^{\perp}$. То значи да он мора истовремено бити ортогоналан на све векторе потпростора $\mathbb{W}_1$: $\langle v|w\rangle_1=0$ и на све векторе потпростора $\mathbb{W}_2$: $\langle v|w\rangle_2=0$, одакле је јасно да поменути вектор мора бити елемент ортокомплемента првог потпростора $|v\rangle\in\mathbb{W}_1^{\perp}$ а истовремено и елемент ортокомплемента другог потпростора $|v\rangle\in\mathbb{W}_2^{\perp}$, односно мора бити елемент њиховог пресека $|v\rangle\in\mathbb{W}_1^{\perp}\cap\mathbb{W}_2^{\perp}$, те је $(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)^{\perp}\subset\mathbb{W}_1^{\perp}\cap\mathbb{W}_2^{\perp}$.

Сад се иде обрнутим поступком. Нека је сада вектор $|v\rangle$ елемент пресека ортокомплемената два потпростора $\mathbb{W}_1^{\perp}\cap\mathbb{W}_2^{\perp}$, што уствари значи да је елемент ортокомплемента првог потпростора $|v\rangle\in\mathbb{W}_1^{\perp}$, а истовремено и елемент ортокомплемента другог потпростора $|v\rangle\in\mathbb{W}_2^{\perp}$.

Сад, сваки вектор који је елемент суме поменута два потпростора $|\bar{v}\rangle\in\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2$ може се написати као збир једног вектора који припада првом $|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_1}\in\mathbb{W}_1$, и другог вектора који припада другом потпростору $|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_2}\in\mathbb{W}_2$, тј. $|\bar{v}\rangle=|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_1}+|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_2}$.

Формирањем скаларног производа вектора $|v\rangle$ и вектора $|\bar{v}\rangle$, следи

$$\langle v|\bar{v}\rangle=\left\langle v\middle||\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_1}+|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_2}\right\rangle=\langle v|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_1}+\langle v|\bar{v}\rangle_{\mathbb{W}_2}.$$

Раније је поменуто да је вектор $|v\rangle$ истовремено елемент ортокомплемената оба потпростора, те су горња два скаларна производа сваки понаособ једнаки нули, те је $\langle v|\bar{v}\rangle=0$. Ово значи да је вектор $|v\rangle\in(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)^{\perp}$, односно да је $\mathbb{W}_1^{\perp}\cap\mathbb{W}_2^{\perp}\subset(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)^{\perp}$.

Како је ортокомплемент суме два потпростора подскуп пресека ортокомплемената два потпростора, и како је пресек ортокомплемената два потпростора подскуп ортокомплемента суме два потпростора, то мора бити

$$\mathbb{W}_1^{\perp}\cap\mathbb{W}_2^{\perp}=(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)^{\perp}.$$

(4.11) У унитарном простору $\mathbb{U}$ дат је скуп вектора $\mathbb{S}$. Одредити базис у простору $\mathbb{L}^{\perp}(\mathbb{S})$

(а) $\mathbb{U}=\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=\{(1,-2,3,4),(3,-5,7,8)\}$, $\langle v_1|v_2\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j$;

(б) $\mathbb{U}=\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=\{(1,3,0,2),(3,7,-1,2),(2,4,-1,0)\}$, $\langle v_1|v_2\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j$;

(в) $\mathbb{U}=\mathbb{P}^3$, $\mathbb{S}=\{1+2t\}$, $\langle v_1|v_2\rangle=\int_0^1 v_1(t)v_2(t)\,\mathrm{d}t$.

(а) Базис ортокомплемента линеала скупа $\mathbb{S}$ састојаће се од два вектора, $|s_1\rangle^{\perp}=(a,b,c,d)$ и $|s_2\rangle^{\perp}=(e,f,g,h)$, који сваки понаособ морају да буду ортогонални на векторе $|s_1\rangle=(1,-2,3,4)$ и $|s_2\rangle=(3,-5,7,8)$ скупа $\mathbb{S}$.

$$\begin{cases}\langle s_1|s_1\rangle^{\perp}=0\\ \langle s_2|s_1\rangle^{\perp}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(1,-2,3,4)|(a,b,c,d)\rangle=0\\ \langle(3,-5,7,8)|(a,b,c,d)\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+3c+4d=0\\ 3a-5b+7c+8d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2b-3c-4d\\ 3a-5b+7c+8d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-3c-4d\\ 6b-9c-12d-5b+7c+8d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-3c-4d\\ b-2c-4d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-3c-4d\\ b=2c+4d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4c+8d-3c-4d\\ b=2c+4d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c+4d\\ b=2c+4d\end{cases}$$

Компоненте a и b вектора $|s_1\rangle^{\perp}$ зависе од компоненти c и d које се бирају произвољно. Ако се прво одабере $c=1$ и $d=0$ добијају се $a=1$ и $b=2$, што даје вектор $|s_1\rangle^{\perp}=(1,2,1,0)$; потом се може узети $c=0$ и $d=1$ чиме се добијају $a=4$ и $b=4$, што даје вектор $|s_2\rangle^{\perp}=(4,4,0,1)$.

Сада се проверава да ли су добијени вектори стварно ортогонални на задате векторе, тј. да ли су одговарајући скаларни производи једнаки нули

$$\langle s_1|s_1\rangle^{\perp}=\langle(1,-2,3,4)|(1,2,1,0)\rangle=1\cdot1+(-2)\cdot2+3\cdot1+4\cdot0=1-4+3=0$$
$$\langle s_1|s_2\rangle^{\perp}=\langle(1,-2,3,4)|(4,4,0,1)\rangle=1\cdot4+(-2)\cdot4+3\cdot0+4\cdot1=4-8+4=0$$
$$\langle s_2|s_1\rangle^{\perp}=\langle(3,-5,7,8)|(1,2,1,0)\rangle=3\cdot1+(-5)\cdot2+7\cdot1+8\cdot0=3-10+7=0$$
$$\langle s_2|s_2\rangle^{\perp}=\langle(3,-5,7,8)|(4,4,0,1)\rangle=3\cdot4+(-5)\cdot4+7\cdot0+8\cdot1=12-20+8=0$$

Пошто су вектори $|s_1\rangle^{\perp}=(1,2,1,0)$ и $|s_2\rangle^{\perp}=(4,4,0,1)$ ортогонални на векторе $|s_1\rangle=(1,-2,3,4)$ и $|s_2\rangle=(3,-5,7,8)$, треба још проверити да ли су линеарно независни

$$\alpha|s_1\rangle^{\perp}+\beta|s_2\rangle^{\perp}=|0\rangle\;\Leftrightarrow\;\alpha(1,2,1,0)+\beta(4,4,0,1)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\;(\alpha+4\beta,2\alpha+4\beta,\alpha,\beta)=(0,0,0,0)$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки здесна и слева добија се систем

$$\begin{cases} \alpha+4\beta=0 \\ 2\alpha+4\beta=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

кога заиста нема потребе решавати, пошто су очигледно коефицијенти линеарне комбинације једнаки нули, што значи да су вектори *линеарно независни*, тј. да чине базис $\mathbb{L}^{\perp}(\mathbb{S})$.

(б) Треба проверити да ли су вектори задатог скупа $\mathbb{S}$ линеарно независни.

Први вектор је различит од нултог, те је добар кандидат за елемент базиса

$$|\,s_1\rangle=(1,3,0,2)\neq|\,0\rangle.$$

Сада се проверава да ли су прва два вектора скупа $\mathbb{S}$ линеарно независна. Њихова линеарна комбинација се изједначи с нултим вектором

$$\alpha|\,s_1\rangle+\beta|\,s_2\rangle=|\,0\rangle \iff \alpha(1,3,0,2)+\beta(3,7,-1,2)=(0,0,0,0)$$
$$\iff (\alpha+3\beta,3\alpha+7\beta,-\beta,2\alpha+2\beta)=(0,0,0,0)$$

што даје систем једначина

$$\begin{cases} \alpha+3\beta=0 \\ 3\alpha+7\beta=0 \\ -\beta=0 \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+3\beta=0 \\ 3\alpha+7\beta=0 \\ \beta=0 \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 3\alpha+7\beta=0 \\ \beta=0 \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

одакле је јасно да су вектори $|\,s_1\rangle$ и $|\,s_2\rangle$ *линеарно независни*.

Да ли су сва три задата вектора линеарно независна? Линеарна комбинација све тројице изједначи се са нултим вектором

$$\alpha|\,s_1\rangle+\beta|\,s_2\rangle+\gamma|\,s_3\rangle=|\,0\rangle \iff \alpha(1,3,0,2)+\beta(3,7,-1,2)+\gamma(2,4,-1,0)=(0,0,0,0)$$
$$\iff (\alpha+3\beta+2\gamma,3\alpha+7\beta+4\gamma,-\beta-\gamma,2\alpha+2\beta)=(0,0,0,0)$$

добија се систем једначина

$$\begin{cases} \alpha+3\beta+2\gamma=0 \\ 3\alpha+7\beta+4\gamma=0 \\ -\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+3\beta+2\gamma=0 \\ 3\alpha+7\beta+4\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-3\gamma+2\gamma=0 \\ 3\alpha+7\beta+4\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha-\gamma=0 \\ 3\alpha+7\beta+4\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=\gamma \\ 3\alpha+7\beta+4\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\gamma \\ 3\gamma-7\gamma+4\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=\gamma \\ 0\cdot\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases}$$

Како коефицијенти α и β линеарне комбинације зависе од коефицијента γ који може бити било који реалан број, то су вектори $|s_1\rangle$, $|s_2\rangle$ и $|s_3\rangle$ *линеарно зависни*, те само вектори $|s_1\rangle$ и $|s_2\rangle$ чине базис линеала $\mathbb{L}(\mathbb{S})$.

Као и у претходном случају, базис ортокомплемента од $\mathbb{L}(\mathbb{S})$ састојаће се од два вектора, $|s_1\rangle^\perp=(a,b,c,d)$ и $|s_2\rangle^\perp=(e,f,g,h)$, који сваки понаособ морају да буду ортогонални на векторе $|s_1\rangle=(1,3,0,2)$ и $|s_2\rangle=(3,7,-1,2)$ скупа $\mathbb{S}$.

$$\begin{cases}\langle s_1|s_1\rangle^\perp=0\\ \langle s_2|s_1\rangle^\perp=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\langle(1,3,0,2)|(a,b,c,d)\rangle=0\\ \langle(3,7,-1,2)|(a,b,c,d)\rangle=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+3b+2d=0\\ 3a+7b-c+2d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=-3b-2d\\ 3a+7b-c+2d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3b-2d\\ -9b-6d+7b-c+2d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3b-2d\\ -2b-c-4d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-(3b+2d)\\ c=-(2b+4d)\end{cases}$$

Компоненте a и c вектора $|s_1\rangle^\perp$ зависе од компоненти b и d које се бирају произвољно. Ако се прво одабере $b=1$ и $d=0$ добијају се $a=-3$ и $c=-2$, што даје вектор $|s_1\rangle^\perp=(-3,1,-2,0)$; потом се може узети да је $b=0$ и $d=1$ што даје $a=-2$ и $c=-4$, односно други вектор $|s_2\rangle^\perp=(-2,0,-4,1)$.

Сада се проверава да ли су добијени вектори стварно ортогонални на задате векторе, тј. да ли су одговарајући скаларни производи једнаки нули

$$\langle s_1|s_1\rangle^\perp=\langle(1,3,0,2)|(-3,1,-2,0)\rangle=1\cdot(-3)+3\cdot1+0\cdot(-2)+2\cdot0=-3+3=0$$
$$\langle s_1|s_2\rangle^\perp=\langle(1,3,0,2)|(-2,0,-4,1)\rangle=1\cdot(-2)+3\cdot0+0\cdot(-4)+2\cdot1=-2+2=0$$
$$\langle s_2|s_1\rangle^\perp=\langle(3,7,-1,2)|(-3,1,-2,0)\rangle=3\cdot(-3)+7\cdot1+(-1)\cdot(-2)+2\cdot0=-9+7+2=0$$
$$\langle s_2|s_2\rangle^\perp=\langle(3,7,-1,2)|(-2,0,-4,1)\rangle=3\cdot(-2)+7\cdot0+(-1)\cdot(-4)+2\cdot1=-6+4+2=0$$

Како су вектори $|s_1\rangle^\perp=(-3,1,-2,0)$ и $|s_2\rangle^\perp=(-2,0,-4,1)$ ортогонални на векторе $|s_1\rangle=(1,3,0,2)$ и $|s_2\rangle=(3,7,-1,2)$, треба још проверити да ли су линеарно независни

$$\alpha|s_1\rangle^\perp+\beta|s_2\rangle^\perp=|0\rangle \Leftrightarrow \alpha(-3,1,-2,0)+\beta(-2,0,-4,1)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (-3\alpha-2\beta,\alpha,-2\alpha-4\beta,\beta)=(0,0,0,0)$$

Како су друга и четврта компонента уређене четворке слева једнаке одговарајућим нулама уређене четворке здесна, то су вектори *линеарно независни*, што значи да стварно образују базис $\mathbb{L}^\perp(\mathbb{S})$.

(в) Задат је само један вектор (уствари полином) $|\,s_1\rangle = 1+2t$ скупа $\mathbb{S}$, те његову линеарну независност не треба проверавати.

Базис ортокомплемента од $\mathbb{L}(\mathbb{S})$ би требало да буде такође само један вектор (полином), рецимо $|\,s_1\rangle^{\perp} = a+bt+ct^2$ (пошто је простор $\mathbb{U}=\mathbb{P}^3$ простор полинома другог реда), који треба да буде ортогоналан на векторе $|\,s_1\rangle = 1+2t$ скупа $\mathbb{S}$.

$$\langle s_1|s_1\rangle^{\perp} = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 s_1(t)\,s_1^{\perp}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 (1+2t)(a+bt+ct^2)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \int_0^1 (a+bt+ct^2+2at+2bt^2+2ct^3)\,\mathrm{d}t = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 [a+(2a+b)t+(2b+c)t^2+2ct^3]\mathrm{d}t = 0$$

$$\Leftrightarrow\; a\int_0^1 \mathrm{d}t + (2a+b)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + (2b+c)\int_0^1 t^2\mathrm{d}t + 2c\int_0^1 t^3\mathrm{d}t = 0$$

$$\Leftrightarrow\; a\left(t\Big|_0^1\right) + (2a+b)\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) + (2b+c)\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) + 2c\left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; a+(2a+b)\frac{1}{2}+(2b+c)\frac{1}{3}+2c\frac{1}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; a+a+\frac{b}{2}+\frac{2b}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2a+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 12a+7b+5c = 0 \;\Leftrightarrow\; c = -\frac{1}{5}(12a+7b)$$

Компонента c вектора $|\,s_1\rangle^{\perp}$ зависи од компоненти a и b које се бирају произвољно. Нека је $a=5$ и нека је $b=0$; добија се да је $c=-12$, што даје вектор (полином) $|\,s_1\rangle^{\perp} = 5-12t^2$, који је довољан да буде базис ортокомплемента од $\mathbb{L}(\mathbb{S})$.

Сада се проверава да ли је добијени полином стварно ортогоналан на задати полином, тј. да ли је њихов скаларни производ једнак нули

$$\langle s_1|s_1\rangle^{\perp} = \int_0^1 s_1(t)\,s_1^{\perp}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+2t)(5-12t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (5+10t-12t^2-24t^3)\mathrm{d}t$$

$$= 5\int_0^1 \mathrm{d}t + 10\int_0^1 t\,\mathrm{d}t - 12\int_0^1 t^2\mathrm{d}t - 24\int_0^1 t^3\mathrm{d}t = 5\left(t\Big|_0^1\right) + 10\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) - 12\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) - 24\left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right)$$

$$= 5+\frac{10}{2}-\frac{12}{3}-\frac{24}{4} = 5+5-4-6 = 10-10 = 0$$

Значи да добијени полином $|\,s_1\rangle^{\perp} = 5-12t^2$ стварно образује базис $\mathbb{L}^{\perp}(\mathbb{S})$.

(4.12) Ако је у векторском простору функција непрекидних на сегменту $[-a,a]$ скаларни производ дефинисан као

$$\langle f_1(t) | f_2(t) \rangle = \int_{-a}^{a} f_1(t)\, f_2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

где је $g(t)$ унапред задата, непрекидна и на сегменту $[-a,a]$ строго позитивна функција, показати да важи израз

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}^{+} \oplus \mathbb{V}^{-}$$

тј. да су потпростори $\mathbb{V}^{+}$ и $\mathbb{V}^{-}$ *ортогонални*.

Из задатка **(4.8)** је познато да је $\mathbb{V} = \mathbb{V}^{+} \dot{+} \mathbb{V}^{-}$. Да би директна сума постала ортогонална сума која се тражи у поставци задатка, потпростори $\mathbb{V}^{+}$ и $\mathbb{V}^{-}$ морају бити *ортогонални*, односно скаларни производ произвољних функција из ових потпростора мора бити једнак нули. Значи, $\forall f^{+}(t) \in \mathbb{V}^{+}$ и $\forall f^{-}(t) \in \mathbb{V}^{-}$ следи

$$\langle f^{+}(t) | f^{-}(t) \rangle = \int_{-a}^{a} f^{+}(t)\, f^{-}(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \left[f^{+}(t)\, g(t) \right] f^{-}(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Сад, производ парне функције $f^{+}(t)$ и по дефиницији строго позитивне функције $g(t)$ мора бити парна функција. Производ такве резултујуће парне функције $f^{+}(t)\, g(t)$ и непарне функције $f^{-}(t)$ јесте непарна подинтегрална функција. Интеграл такве функције на симетричном сегменту $[-a,a]$ мора бити једнак *нули*, те је

$$\langle f^{+}(t) | f^{-}(t) \rangle = 0\,,\ \forall f^{+}(t) \in \mathbb{V}^{+},\ \forall f^{-}(t) \in \mathbb{V}^{-}.$$

Закључак је да је заиста $\mathbb{V}^{+} \perp \mathbb{V}^{-}$, односно да је $\mathbb{V} = \mathbb{V}^{+} \oplus \mathbb{V}^{-}$.

(4.13) Који су од парова потпростора наведених ниже *међусобно ортогонални* (један другоме *комплементи*)?

(а) Потпростори су дати преко парова вектора

$$\begin{array}{ll} |v_1\rangle_1 = (1,1,0,0) \in \mathbb{W}_1 & |v_1\rangle_2 = (0,1,0,1) \in \mathbb{W}_2 \\ |v_2\rangle_1 = (1,0,1,0) \in \mathbb{W}_1 ^{,} & |v_2\rangle_2 = (0,0,1,1) \in \mathbb{W}_2 \end{array}.$$

Формирају се следећи скаларни производи

$$\begin{aligned} {}_1\langle v_1 | v_1\rangle_2 &= 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1 \neq 0 \\ {}_1\langle v_1 | v_2\rangle_2 &= 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0 \\ {}_1\langle v_2 | v_1\rangle_2 &= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \\ {}_1\langle v_2 | v_2\rangle_2 &= 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Даклем, потпростори $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ *нису* међусобно ортогонални.

(б) Потпростори су дати преко парова вектора

$$\begin{array}{ll} |v_1\rangle_1 = (-1,1,1,0) \in \mathbb{W}_1 & |v_1\rangle_2 = (0,1,-1,1) \in \mathbb{W}_2 \\ |v_2\rangle_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{W}_1 ^{,} & |v_2\rangle_2 = (0,0,0,1) \in \mathbb{W}_2 \end{array}.$$

Формирају се следећи скаларни производи

$$\begin{aligned} {}_1\langle v_1 | v_1\rangle_2 &= (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 = 0 \\ {}_1\langle v_1 | v_2\rangle_2 &= (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \\ {}_1\langle v_2 | v_1\rangle_2 &= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 1 = 0 \\ {}_1\langle v_2 | v_2\rangle_2 &= 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Значи да потпростори $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ *јесу* међусобно ортогонални.

(в) Потпростори су дати преко тројки вектора

$$\begin{array}{lcl} |v_1\rangle_1 = (2,3,11,5) \in \mathbb{W}_1 & & |v_1\rangle_2 = (2,1,3,2) \in \mathbb{W}_2 \\ |v_2\rangle_1 = (1,1,5,2) \in \mathbb{W}_1 & , & |v_2\rangle_2 = (1,1,3,4) \in \mathbb{W}_2 \\ |v_3\rangle_1 = (0,1,1,1) \in \mathbb{W}_1 & & |v_3\rangle_2 = (5,2,6,2) \in \mathbb{W}_2 \end{array}.$$

На основу само једног скаларног производа

$${}_1\langle v_1 | v_1\rangle_2 = 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 11\cdot 3 + 5\cdot 2 = 4 + 3 + 33 + 10 = 50 \neq 0$$

може се закључити да потпростори $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ *нису* међусобно ортогонални.

(4.14) Одредити *пројекцију* вектора $|v\rangle$ на $\mathbb{L}(|\tilde{v}\rangle)$ у следећим случајевима

(а) $\mathbb{R}^3$: $|v\rangle=(1,-1,2)$, $|\tilde{v}\rangle=(0,1,1)$; $\langle v|\tilde{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$;

(б) $\mathbb{C}^3$: $|v\rangle=(1-i,2+3i)$, $|\tilde{v}\rangle=(2-i,3)$; $\langle v|\tilde{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_i$;

(в) $\mathbb{R}^{22}$: $|v\rangle=\begin{bmatrix}1&2\\1&-3\end{bmatrix}$, $|\tilde{v}\rangle=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$; $\langle v|\tilde{v}\rangle=\mathrm{Tr}(v^\dagger v)$;

(г) $\mathbb{P}^3$: $|v\rangle=-1+2t$, $|\tilde{v}\rangle=t^2$; $\langle v|\tilde{v}\rangle=\int_0^1 v(t)\tilde{v}(t)\,\mathrm{d}t$.

(а) По дефиницији, пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ дата је изразом

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$$

где је $|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$ нормирани вектор $|\tilde{v}\rangle$, односно вектор $|\tilde{v}\rangle$ подељен својом нормом

$$|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle=\frac{|\tilde{v}\rangle}{\||\tilde{v}\rangle\|}=\frac{|\tilde{v}\rangle}{\sqrt{\langle\tilde{v}|\tilde{v}\rangle}}=\frac{(0,1,1)}{\sqrt{\langle(0,1,1)|(0,1,1)\rangle}}=\frac{(0,1,1)}{\sqrt{0\cdot0+1\cdot1+1\cdot1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1).$$

Тражена пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ је значи једнака

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\middle|(1,-1,2)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)=\frac{1}{2}[0\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot2](0,1,1)=\frac{1}{2}(0,1,1)=\frac{1}{2}|\tilde{v}\rangle.$$

(б) Као и раније, пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ дата је изразом

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$$

где је $|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$ нормирани вектор $|\tilde{v}\rangle$, односно вектор $|\tilde{v}\rangle$ подељен својом нормом

$$|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle=\frac{|\tilde{v}\rangle}{\||\tilde{v}\rangle\|}=\frac{|\tilde{v}\rangle}{\sqrt{\langle\tilde{v}|\tilde{v}\rangle}}=\frac{(2-i,3)}{\sqrt{\langle(2-i,3)|(2-i,3)\rangle}}=\frac{(2-i,3)}{\sqrt{(2-i)^*(2-i)+3^*\cdot3}}$$
$$=\frac{(2-i,3)}{\sqrt{(2+i)(2-i)+3\cdot3}}=\frac{(2-i,3)}{\sqrt{(2^2-i^2)+9}}=\frac{(2-i,3)}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2-i,3)$$

Тражена пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ је онда једнака

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}(2-i,3)\middle|(1-i,2+3i)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{14}}(2-i,3)=\frac{1}{14}\left[(2-i)^*(1-i)+3^*(2+3i)\right](2-i,3)$$
$$=\frac{1}{14}[(2+i)(1-i)+3(2+3i)](2-i,3)=\frac{1}{14}(2-2i+i-i^2+6+9i)(2-i,3)$$
$$=\frac{9+8i}{14}(2-i,3)=\frac{9+8i}{14}|\tilde{v}\rangle$$

(в) Опет је пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ дата следећим изразом

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$$

где је $|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$ нормирани вектор $|\tilde{v}\rangle$, односно вектор $|\tilde{v}\rangle$ подељен својом нормом

$$|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle = \frac{|\tilde{v}\rangle}{\||\tilde{v}\rangle\|} = \frac{|\tilde{v}\rangle}{\sqrt{\langle\tilde{v}|\tilde{v}\rangle}} = \frac{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\left\langle\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right\rangle}} = \frac{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)}} = \frac{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot(-1)+1\cdot 2\\ (-1)\cdot 0+2\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot 2\end{bmatrix}\right)}} = \frac{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Тражена пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ је онда једнака

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle = \left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot(-3)\\ (-1)\cdot 1+2\cdot 1 & (-1)\cdot 2+2\cdot(-3)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -8\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{-7}{6}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = -\frac{7}{6}|\tilde{v}\rangle$$

(г) По последњи пут, пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ дата је изразом

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$$

где је $|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle$ нормирани вектор $|\tilde{v}\rangle$, односно вектор $|\tilde{v}\rangle$ подељен својом нормом

$$|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle = \frac{|\tilde{v}\rangle}{\||\tilde{v}\rangle\|} = \frac{|\tilde{v}\rangle}{\sqrt{\langle\tilde{v}|\tilde{v}\rangle}} = \frac{|\tilde{v}\rangle}{\sqrt{\int_0^1 \tilde{v}(t)\,\tilde{v}(t)\,\mathrm{d}t}} = \frac{t^2}{\sqrt{\int_0^1 t^2t^2\mathrm{d}t}} = \frac{t^2}{\sqrt{\left(\frac{t^5}{5}\Big|_0^1\right)}} = \frac{t^2}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt{5}\,t^2\,.$$

Тражена пројекција вектора $|v\rangle$ на правац вектора $|\tilde{v}\rangle$ је онда једнака

$$\langle \mathrm{e}_{\tilde{v}}|v\rangle|\mathrm{e}_{\tilde{v}}\rangle = \left(\int_0^1 \mathrm{e}_{\tilde{v}}(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}_{\tilde{v}}(t) = \left[\int_0^1 \sqrt{5}\,t^2\,(-1+2t)\,\mathrm{d}t\right]\sqrt{5}\,t^2$$

$$= 5t^2\int_0^1 t^2\,(-1+2t)\,\mathrm{d}t = 5t^2\int_0^1 (-t^2+2t^3)\,\mathrm{d}t = 5t^2\left(-\int_0^1 t^2\mathrm{d}t + 2\int_0^1 t^3\mathrm{d}t\right)$$

$$= 5t^2\left[-\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)+2\left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right)\right] = 5t^2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 5t^2\,\frac{-2+3}{6} = \frac{5}{6}t^2 = \frac{5}{6}|\tilde{v}\rangle$$

(4.15) У еуклидском простору $\mathbb{R}^4$, у коме је скаларни производ стандардно дефинисан

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{4} \xi_i \eta_i = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \xi_4\eta_4 ,$$

вектори

$$|v_1\rangle = (1,2,2,1) , \quad |v_2\rangle = (2,1,1,2)$$

образују потпростор $\mathbb{W}$. Одредити *пројекције* и *нормале* вектора

$$|a\rangle = (1,2,3,4) , \quad |b\rangle = (1,1,1,1) , \quad |c\rangle = (1,1,-1,-1)$$

на потпростор $\mathbb{W}$.

За почетак треба проверити да ли су дата два вектора линеарно независни, будући да је у поставци задатка речено да они образују потпростор $\mathbb{W}$. То се ради тако што се њихова линеарна комбинација изједначи са нултим вектором

$$\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle = |0\rangle \iff \alpha_1(1,2,2,1) + \alpha_2(2,1,1,2) = (0,0,0,0)$$
$$\iff (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0,0,0)$$

Изједначавањем одговарајућих компоненти уређених четворки слева и здесна добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ 2(-2\alpha_2) + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ (-3)\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

из кога је јасно да су задата два вектора *линеарно независна*, односно да чине *базис* потпростора $\mathbb{W}$.

Ипак, дата два вектора *нису ортогонални* међусобно

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle (1,2,2,1) | (2,1,1,2) \rangle = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 8 \neq 0 ,$$

те се морају *ортонормирати* Грам-Шмитовим поступком; почиње се са првим вектором

$$|e_{v_1}\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\| |v_1\rangle \|} = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1 | v_1 \rangle}} = \frac{(1,2,2,1)}{\sqrt{\langle (1,2,2,1) | (1,2,2,1) \rangle}} = \frac{(1,2,2,1)}{\sqrt{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)$$

а наставља се са другим вектором

$$|e_{v_2}\rangle = \frac{|v_2\rangle - \langle e_{v_1} | v_2 \rangle |e_{v_1}\rangle}{\| |v_2\rangle - \langle e_{v_1} | v_2 \rangle |e_{v_1}\rangle \|} = \frac{(2,1,1,2) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1) \middle| (2,1,1,2) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)}{\left\| (2,1,1,2) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1) \middle| (2,1,1,2) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1) \right\|}$$

$$=\frac{(2,1,1,2)-\frac{1}{10}\langle(1,2,2,1)|(2,1,1,2)\rangle(1,2,2,1)}{\left\|(2,1,1,2)-\frac{1}{10}\langle(1,2,2,1)|(2,1,1,2)\rangle(1,2,2,1)\right\|}=\frac{(2,1,1,2)-\frac{8}{10}(1,2,2,1)}{\left\|(2,1,1,2)-\frac{8}{10}(1,2,2,1)\right\|}$$

$$=\frac{(2,1,1,2)-\frac{4}{5}(1,2,2,1)}{\left\|(2,1,1,2)-\frac{4}{5}(1,2,2,1)\right\|}=\frac{\left(2-\frac{4}{5},1-\frac{8}{5},1-\frac{8}{5},2-\frac{4}{5}\right)}{\left\|\left(2-\frac{4}{5},1-\frac{8}{5},1-\frac{8}{5},2-\frac{4}{5}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},-\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)}{\left\|\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},-\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)\right\|}$$

$$=\frac{\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},-\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)}{\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{9}{25}+\frac{9}{25}+\frac{36}{25}}}=\frac{\cancel{5}}{\sqrt{90}}\frac{1}{\cancel{5}}(6,-3,-3,6)=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{10}}(2,-1,-1,2)=\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2)$$

Пошто су овим поступком добијена два ортонормирана вектора

$$\left|\mathrm{e}_{v_1}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1),\ \left|\mathrm{e}_{v_2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2),$$

сада се могу одредити *пројекције* и *нормале* три задата вектора.

Пројекција првог вектора $|a\rangle=(1,2,3,4)$ дата је изразом

$$\mathrm{Proj}|a\rangle=\langle\mathrm{e}_{v_1}|a\rangle|\mathrm{e}_{v_1}\rangle+\langle\mathrm{e}_{v_2}|a\rangle|\mathrm{e}_{v_2}\rangle$$

$$=\left\langle\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)\middle|(1,2,3,4)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)+\left\langle\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2)\middle|(1,2,3,4)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2)$$

$$=\frac{1}{10}\langle(1,2,2,1)|(1,2,3,4)\rangle(1,2,2,1)+\frac{1}{10}\langle(2,-1,-1,2)|(1,2,3,4)\rangle(2,-1,-1,2)$$

$$=\frac{1\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+1\cdot4}{10}(1,2,2,1)+\frac{2\cdot1+(-1)\cdot2+(-1)\cdot3+2\cdot4}{10}(2,-1,-1,2)$$

$$=\frac{15}{10}(1,2,2,1)+\frac{5}{10}(2,-1,-1,2)=\frac{3}{2}(1,2,2,1)+\frac{1}{2}(2,-1,-1,2)=\frac{1}{2}(3+2,6-1,6-1,3+2)$$

$$=\frac{1}{2}(5,5,5,5)=\frac{5}{2}(1,1,1,1)$$

Како је вектор $|a\rangle$ једнак збиру своје пројекције и нормале: $|a\rangle=\mathrm{Proj}|a\rangle+\mathrm{Nor}|a\rangle$, његова нормала једнака је

$$\mathrm{Nor}|a\rangle=|a\rangle-\mathrm{Proj}|a\rangle=(1,2,3,4)-\frac{5}{2}(1,1,1,1)=\left(1-\frac{5}{2},2-\frac{5}{2},3-\frac{5}{2},4-\frac{5}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{2-5}{2},\frac{4-5}{2},\frac{6-5}{2},\frac{8-5}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}(-3,-1,1,3)$$

Пројекција другог вектора $|b\rangle = (1,1,1,1)$ дата је изразом

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}|b\rangle &= \langle \mathrm{e}_{v_1}|b\rangle|\mathrm{e}_{v_1}\rangle + \langle \mathrm{e}_{v_2}|b\rangle|\mathrm{e}_{v_2}\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)\middle|(1,1,1,1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1) + \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2)\middle|(1,1,1,1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2) \\
&= \frac{1}{10}\langle(1,2,2,1)|(1,1,1,1)\rangle(1,2,2,1) + \frac{1}{10}\langle(2,-1,-1,2)|(1,1,1,1)\rangle(2,-1,-1,2) \\
&= \frac{1\cdot1+2\cdot1+2\cdot1+1\cdot1}{10}(1,2,2,1) + \frac{2\cdot1+(-1)\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot1}{10}(2,-1,-1,2) \\
&= \frac{6}{10}(1,2,2,1) + \frac{2}{10}(2,-1,-1,2) = \frac{3}{5}(1,2,2,1) + \frac{1}{5}(2,-1,-1,2) = \frac{1}{5}(3+2,6-1,6-1,3+2) \\
&= \frac{1}{5}(5,5,5,5) = (1,1,1,1)
\end{aligned}$$

Како је вектор $|b\rangle$ једнак збиру своје пројекције и нормале: $|b\rangle = \mathrm{Proj}|b\rangle + \mathrm{Nor}|b\rangle$, његова нормала једнака је нултом вектору

$$\mathrm{Nor}|b\rangle = |b\rangle - \mathrm{Proj}|b\rangle = (1,1,1,1) - (1,1,1,1) = (0,0,0,0) = |0\rangle .$$

Пројекција трећег вектора $|c\rangle = (1,1,-1,-1)$ дата је изразом

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}|c\rangle &= \langle \mathrm{e}_{v_1}|c\rangle|\mathrm{e}_{v_1}\rangle + \langle \mathrm{e}_{v_2}|c\rangle|\mathrm{e}_{v_2}\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1)\middle|(1,1,-1,-1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,1) + \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2)\middle|(1,1,-1,-1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,2) \\
&= \frac{1}{10}\langle(1,2,2,1)|(1,1,-1,-1)\rangle(1,2,2,1) + \frac{1}{10}\langle(2,-1,-1,2)|(1,1,-1,-1)\rangle(2,-1,-1,2) \\
&= \frac{1\cdot1+2\cdot1+2\cdot(-1)+1\cdot(-1)}{10}(1,2,2,1) + \frac{2\cdot1+(-1)\cdot1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot(-1)}{10}(2,-1,-1,2) \\
&= \frac{0}{10}(1,2,2,1) + \frac{0}{10}(2,-1,-1,2) = (0,0,0,0) = |0\rangle
\end{aligned}$$

Како је вектор $|c\rangle$ једнак збиру своје пројекције и нормале: $|c\rangle = \mathrm{Proj}|c\rangle + \mathrm{Nor}|c\rangle$, његова нормала једнака је њему самом

$$\mathrm{Nor}|c\rangle = |c\rangle - \mathrm{Proj}|c\rangle = (1,1,-1,-1) - (0,0,0,0) = (1,1,-1,-1) = |c\rangle .$$